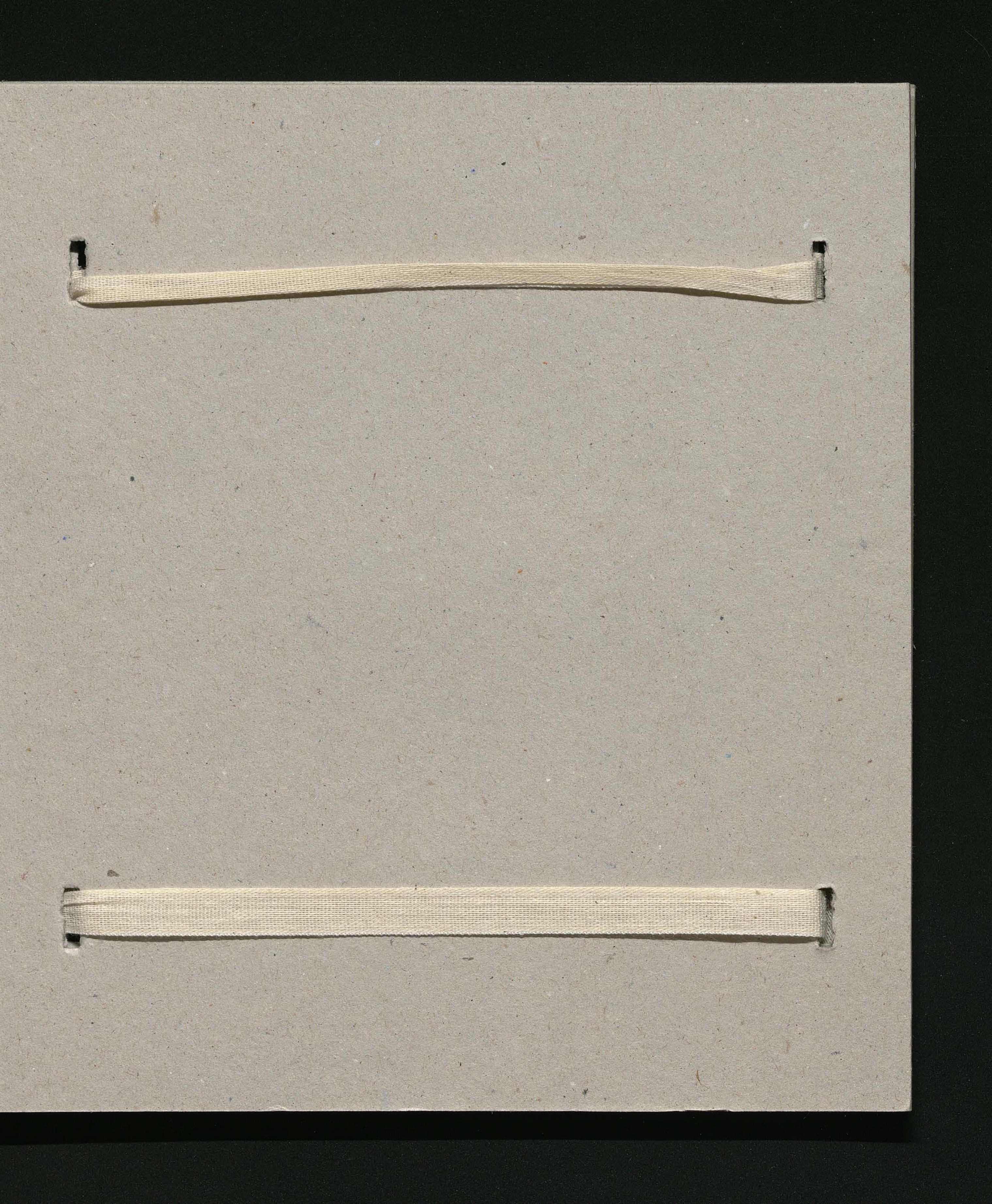
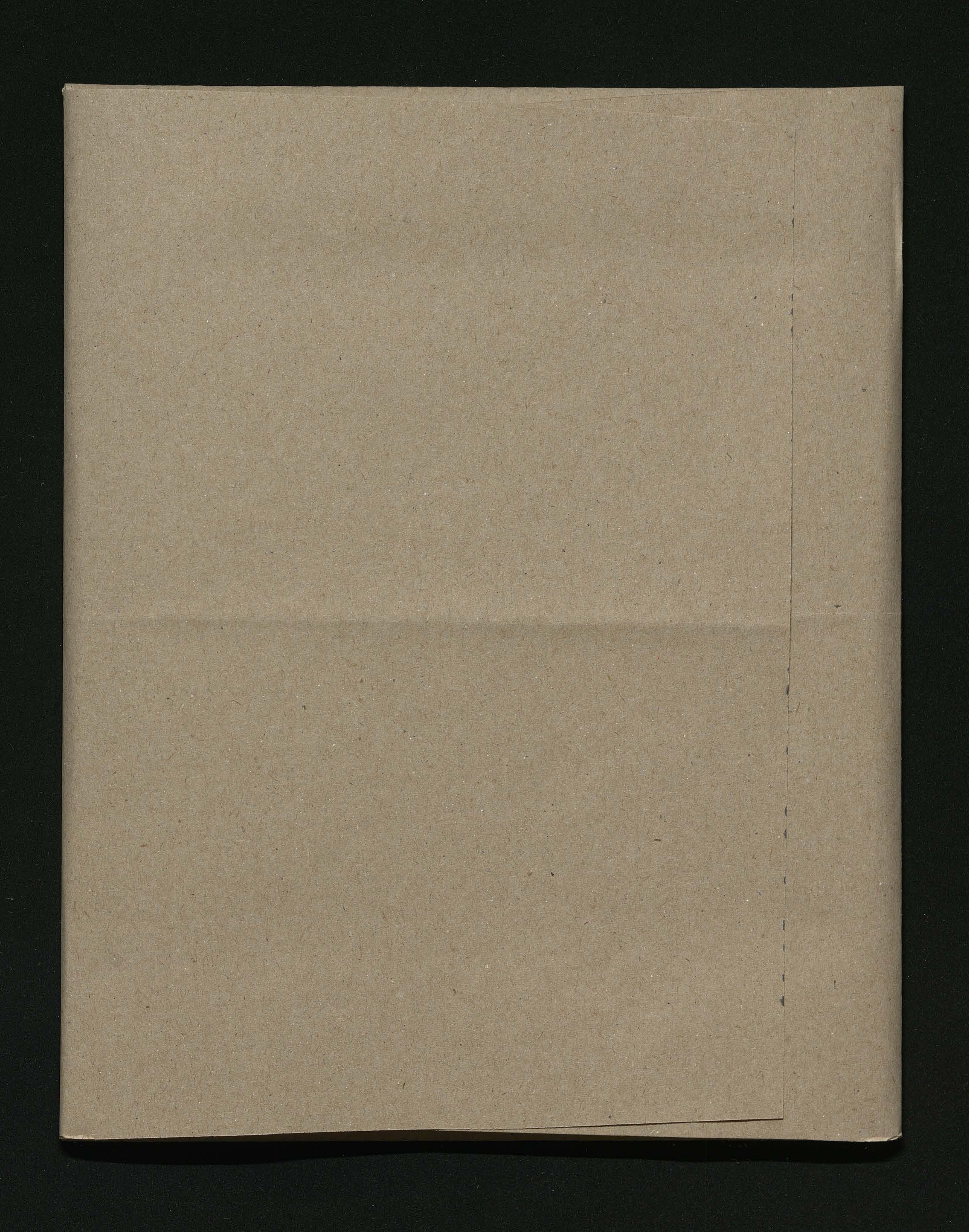
9347





1x

Sur les phénomènes ~~de~~ l'aérodynamique et ~~leurs~~ les effets thermiques qui les accompagnent

par

M. Smoluchowski,

professeur à l'Université de Léopol ~~(Lemberg)~~.

[20] [rw. druk 1903. Bullet. Acad. Crac. 143-183]

M. Marie Smoluchowski. O zjawiskach aerodynamicznych i towarzyszących im objawach cieplnych. (Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent). Mémoire présenté par M. Lad. Natanson m. t.

Sur les phénomènes ~~de l'~~ aérodynamiques et ~~leurs~~ les effets thermiques qui les accompagnent

par

M. Smoluchowski

professeur à l'Université de Léopol.

I. Équations fondamentales de l'aérodynamique.

§1. L'aérodynamique est restée ~~beaucoup~~ très en arrière de ~~en comparaison avec~~ l'hydrodynamique, qui, ~~se peut vanter~~ depuis ~~le temps des~~ les recherches fondamentales de Stokes, de Helmholtz et de Kelvin, ~~se~~ a ~~peut vanter d'un~~ fait des progrès énormes, grâce surtout à l'intérêt qu'elle a éveillé chez les savants anglais (Lord Rayleigh, MM. Lamb, Love, Hicks, Reynolds, Thomson etc.).

En dehors de l'acoustique, il n'y a que fort peu de cas particuliers (transpiration par des tubes Poiseuille, effusion par une ouverture dans une lame mince, disques oscillants de Maxwell et Meyer, résistance des corps projetés, etc.) qui aient été traités avec quelque approximation, très vague quelquefois; mais pas une loi générale, pas une solution précise n'a été trouvée jusqu'à présent.

Les problèmes les plus importants ~~se~~ sont à peine abordés, surtout en ce qui concerne les applications à l'aérostatique et à la météorologie, lesquelles, par conséquent, sont plongées dans un état d'empirisme chaotique.

C'est qu'on ne peut pas, en général, ~~d'après~~ (comme dans) les ~~manières~~ méthodes de l'Hydrodynamique, regarder les gaz comme incompressibles et surtout que la compressibilité, déterminée par la loi de Boyle-Charles, dépend d'une nouvelle variable, de la température, dont les variations jouent un rôle aussi considérable que les différences de ~~t~~ pression.

Par conséquent, il faut ajouter, aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, une équation déduite de la Thermodynamique. La complication du problème consiste en ce qu'il est impossible, en général, de séparer ce côté thermique de la recherche du côté mécanique.

Dans les travaux antérieurs on ~~acceptait~~ admettait un état isothermique ou un état adiabatique du gaz, sans justifier ces hypothèses d'une manière suffisante ~~ni en exposant pas de preuve suffisante~~, ou bien on se contentait de supposer que la réalité ~~sera~~ est comprise entre ces limites, souvent très éloignées.*) — W d. c. —

*) ~~[illegible]~~ Nous trouvons la théorie isothermique de l'effusion par une petite ouverture dans les ouvrages de: Duhamel, Mousson, Wüllner, Lang, la théorie adiabatique [d'après St. Venant et Wantzel] ~~[illegible]~~ chez: Zeuner, Wilde, Lamb; toutes les deux chez Winkelmann, Chwolson etc.

Ce n'est qu'en 1894, que la loi thermique (a été précisée,*)
sur laquelle ces considérations doivent être basées, et qui,
par conséquent ~~doit~~ devrait aussi servir de fondement à l'exposé
systématique de l'aérodynamique. Elle a été déduite[1]) i dalej jak przypisek [ ]
— Comme cette loi n'a pas été, jusqu'à aujourd'hui ~~point exploitée~~ appliquée à ces questions
~~dans ce sens~~**), nous nous proposons, dans ce travail, ~~suivant~~,
de ~~donner une contribution à de telles recherches.~~ présenter un essai dans cette direction.

§2. Adoptons le procédé de Stokes***) ~~: de~~ qui consiste à déduire les équations
de la viscosité sans hypothèse moléculaire, en supposant seulement
que les forces du frottement intérieur ~~sont~~ soient proportionnelles à la ~~[illegible]~~
vitesse des déformations élémentaires. ~~de la vitesse~~ (Pour être exact, il y faut ajouter une correction,
si la température du gaz n'est pas la même partout, puisque le
coefficient de ~~la~~ viscosité en dépend. En effet, on ne saurait ~~pas~~
négliger cette circonstance, ~~lorsqu'il s'agit~~ s'il s'agit, par exemple, des mouvements
de l'océan atmosphérique ~~où règne~~ dans les régions supérieures ~~dont~~ duquel règne) sans doute une température

*) ~~Déduite~~ [en même temps par Kirchhoff ~~pour le cas spécial d'un gaz monoatomique~~, et, plus ~~pour le cas~~ généralement ~~par M.~~ par M. Natanson à l'aide de considérations cinématiques ainsi que
~~et~~ par M. C. Neumann à l'aide de la Thermodynamique] 1) voir Natanson, Bulletin Intern. de l'Acad. de Cracovie 1902 p. 144.

**) Nous en ~~avons~~ donné ~~fait~~ une application dans ~~une~~ notre étude „Sur l'atmosphère ~~[illegible]~~ de la terre et des planètes", voir Physik. Zeitschr. 2 p. 307 (1901).

***) D'après Lamb, Hydrodynamics p. 509

extrêmement[1] basse ~~dans les régions supérieures.~~ *)

Dans ce cas, ~~le résultat de~~ la substitution des équations bien connues

$$p_{xx} = p + \frac{2\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{etc.} \qquad (1)$$

dans

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \qquad (2)$$

~~serait~~ donnerait

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial x}\left[\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial \mu}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \quad \text{etc.} \qquad (3)$$

— Mais dans les applications ordinaires, les différences des températures n'étant pas grandes, on peut négliger les termes de la ligne seconde, et c'est ce que en général nous ferons ~~aussi~~.

Dans ces équations, p représente la moyenne arithmétique des trois tensions perpendiculaires :

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \qquad (4)$$

— Il n'en résulte pas que p soit identique ~~avec~~ à la pression qui figure ~~entre~~ dans l'expression de la loi de Boyle-Charles, ce qui est, néanmoins, une hypothèse bien probable, admise presque par tous les auteurs récents.**) La même supposition peut être énoncée sous une autre forme : si nous avions considéré la loi Boyle-Charles

1) Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc." loc. cit.

**) Voir Natanson : Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie 1901 p. 95

1) Voir à ce sujet Natanson, Bulletin Internat. de l'Académie de Cracovie, Année 1901, pp. 108–110.

au lieu de l'équation (4) comme définition de p, nous serions parvenus à l'équation

div antykwa

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \nu \frac{\partial \, \mathrm{div}}{\partial x} \quad \text{--- --- ---} \quad (5)$$

[où le symbole div est une abréviation pour $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$]

et nous devrions formuler l'hypothèse de Stokes ~~ainsi~~ de la manière suivante: le coefficient de viscosité ν pour les changements de volume est le tiers ~~troisième partie~~ du coefficient μ pour les changements de forme.

C'est ce que nous admettrons ~~aussi~~ eu égard à la théorie cinétique, qui d'après Maxwell*) fournit le même résultat[1]; mais nous insistons sur l'importance d'une vérification expérimentale de cette relation, et nous ne croyons pas ~~ne partageons du tout~~ avec M. ~~l'opinion de~~ Meyer**), que ce soit ~~c'est~~ une question indifférente, ~~puisque~~ parce que la viscosité de volume se superpose à ~~sous~~ la pression et n'en peut pas être distinguée. On verra plus loin des exemples qui ~~de~~ démontrent la fausseté de cette opinion (§ 24, § 25); ~~auquel~~ on y pourrait encore ajouter l'extinction des ondes sonores par suite de la viscosité, à laquelle ~~contribue aussi cette~~ "viscosité de volume" contribue aussi.

§ 3. La méthode la plus simple | de déduire l'équation | pour thermique fondamentale consiste dans l'application du principe de la conservation de l'énergie à un ~~~~ élément de masse ~~volume~~, $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$, se déplaçant dans le gaz. W d.c.

*) Scientific Papers II. p. 69 (1890)

**) Gastheorie p. Crelle Journal 75 p. 337 (1873). (M. Meyer trouve $\nu =$ en s'appuyant sur les principes de théorie cinétique des gaz (d'après Maxwell-Clausius), mais ce résultat est erroné. Voir Boltzmann Gastheorie I p. 93 (1895)

La variation de l'~~Son~~ énergie totale, comprenant les énergies calorifique, cinétique et potentielle (par rapport aux forces extérieures), ~~s'augmentera~~ ~~est réduite~~ sera égale au ~~du~~ travail effectué par les tensions agissant ~~s~~ sur sa surface ~~et~~, augmenté de la quantité de chaleur transmise en vertu de la conductibilité calorifique.

Cette relation est exprimée par l'équation :

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{c_v}{A}\theta + \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + U\right] dm = \left[\frac{\partial}{\partial x}(u p_{xx} + v p_{xy} + w p_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u p_{xy} + v p_{yy} + w p_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(u p_{xz} + v p_{yz} + w p_{zz}) + \kappa \Delta^2\theta\right] dx\,dy\,dz \quad \ldots (6)$$

qui se transforme par le développement des opérations différentielles et par l'introduction des valeurs (1) et des équations de mouvement en :

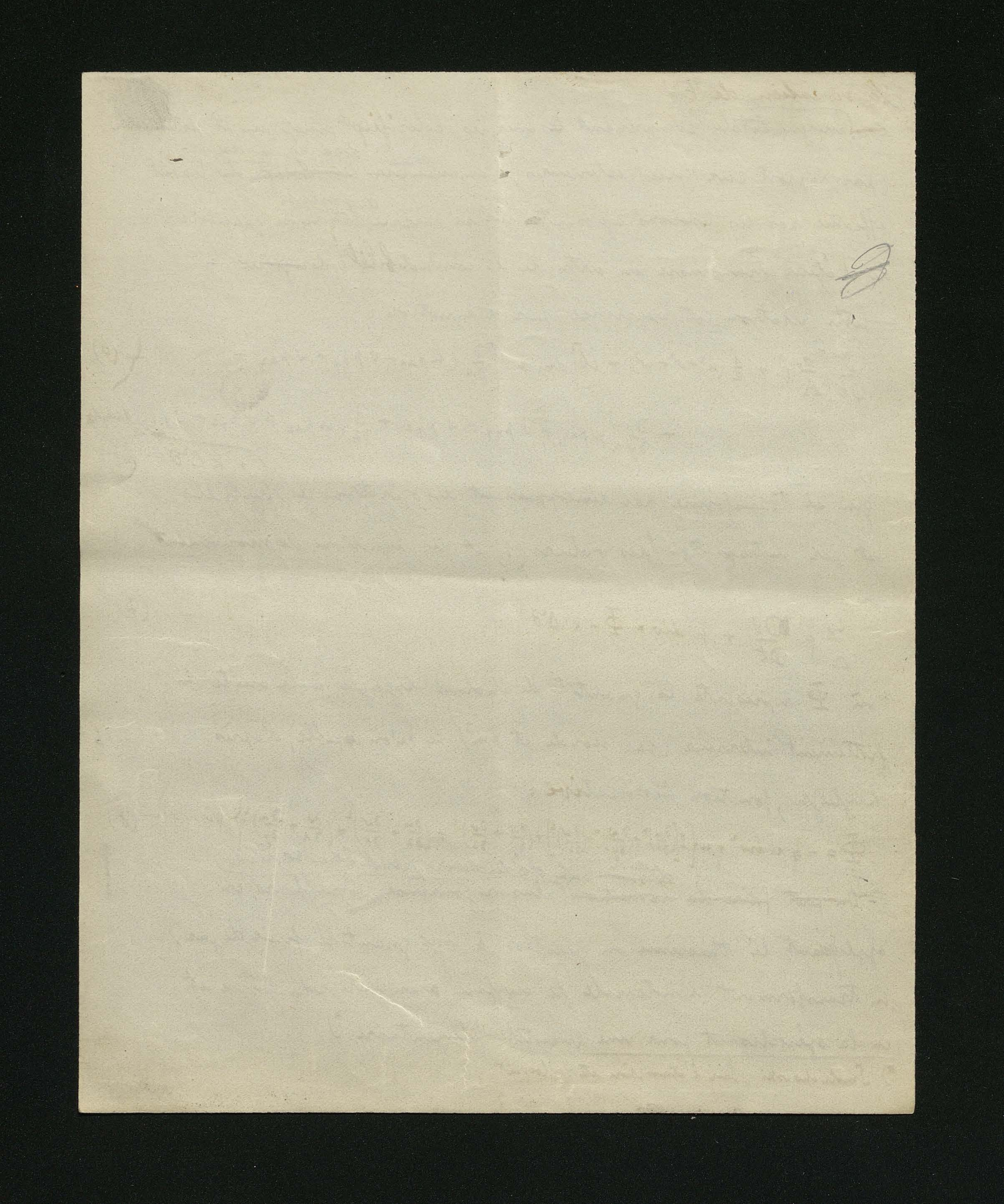
$$\frac{c_v}{A}\rho\frac{D\theta}{Dt} + p\,\mathrm{div} = \Phi + \kappa\Delta^2\theta \quad \ldots (7)$$

où Φ représente la quantité de chaleur dégagée ~~à la suite du~~ grâce au frottement intérieur (par seconde et cm³), ce qu'on appelle, d'après Lord Rayleigh, fonction dissipative :

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}^2 + \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} \quad \ldots (8)$$

~~On peut faire la déduction~~ La ~~déduire~~ déduction peut être rendue (plus rigoureuse ~~d'ailleurs~~, en appliquant le théorème en question à une quantité finie de gaz, en transformant l'intégrale de surface en intégrale triple et en la spécialisant pour une quantité élémentaire*)

*) Smoluchowski „Sur l'atmosphère etc." loc. cit



~~La même équation~~

§ 4. Il faut remarquer, cependant, que cette équation ne sera pas rigoureusement ~~exacte, sans doute, en toute rigueur~~, ~~de même~~ pas plus que les équations (3), puisqu'on ne peut pas supposer que le frottement intérieur et la conductibilité de la chaleur soient des phénomènes tout-à-fait indépendants. On ~~ne peut pas~~ pourrait même douter, qu'il y ait (en général) des phénomènes quelconques, simultanés et coexistants, qui soient rigoureusement indépendants l'un de l'autre.

(Dans notre cas, M. Natanson*) a démontré, en effet, que la théorie moléculaire cinématique fournit, pour les phénomènes de conductibilité dans un gaz, suivant que ce gaz est en repos ou en mouvement, des expressions différentes; mais en général, la différence sera très petite, et il sera difficile, ~~probablement~~, d'en démontrer l'existence par ~~la~~ voie expérimentale.

~~Donc~~, Nous nous bornerons donc (au degré d'exactitude, auquel ~~donné~~ permet d'atteindre ~~par la supposition~~ l'hypothèse de l'„indépendance" ou de la „superposition" des phénomènes de viscosité et conductibilité, ~~et nous n'entrerons pas dans la discussion des dites questions.~~

(De même, nous omettrons la considération des écarts de la loi de Boyle Charles, en supposant ~~la~~ ~~ph~~ l'exactitude de la formule

$$\frac{p}{\rho} = R\theta \qquad (9)$$

*) Bulletin internat. de l'Acad. d. Sc. Cracovie 1902. p

§5. En somme, les équations fondamentales de l'aérodynamique seront, outre la formule citée (9), les suivantes :

~~l'équation~~

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \, div}{\partial x} + \mu \Delta^2 u \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \, div}{\partial y} + \mu \Delta^2 v \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \, div}{\partial z} + \mu \Delta^2 w \end{aligned}\right\} \quad \text{-- - - - — - (10)}$$

l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{-- — (11)}$$

et l'équation thermique (7) qui peut être écrite, en considérant la relation $\frac{c}{A} = \frac{R}{k-1}$ ~~et~~ ainsi que (9) et (10), sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} + k p \, div = (k-1)\left[\Phi + \kappa \Delta^2 \theta\right] \quad \text{. - - - - (12)}$$

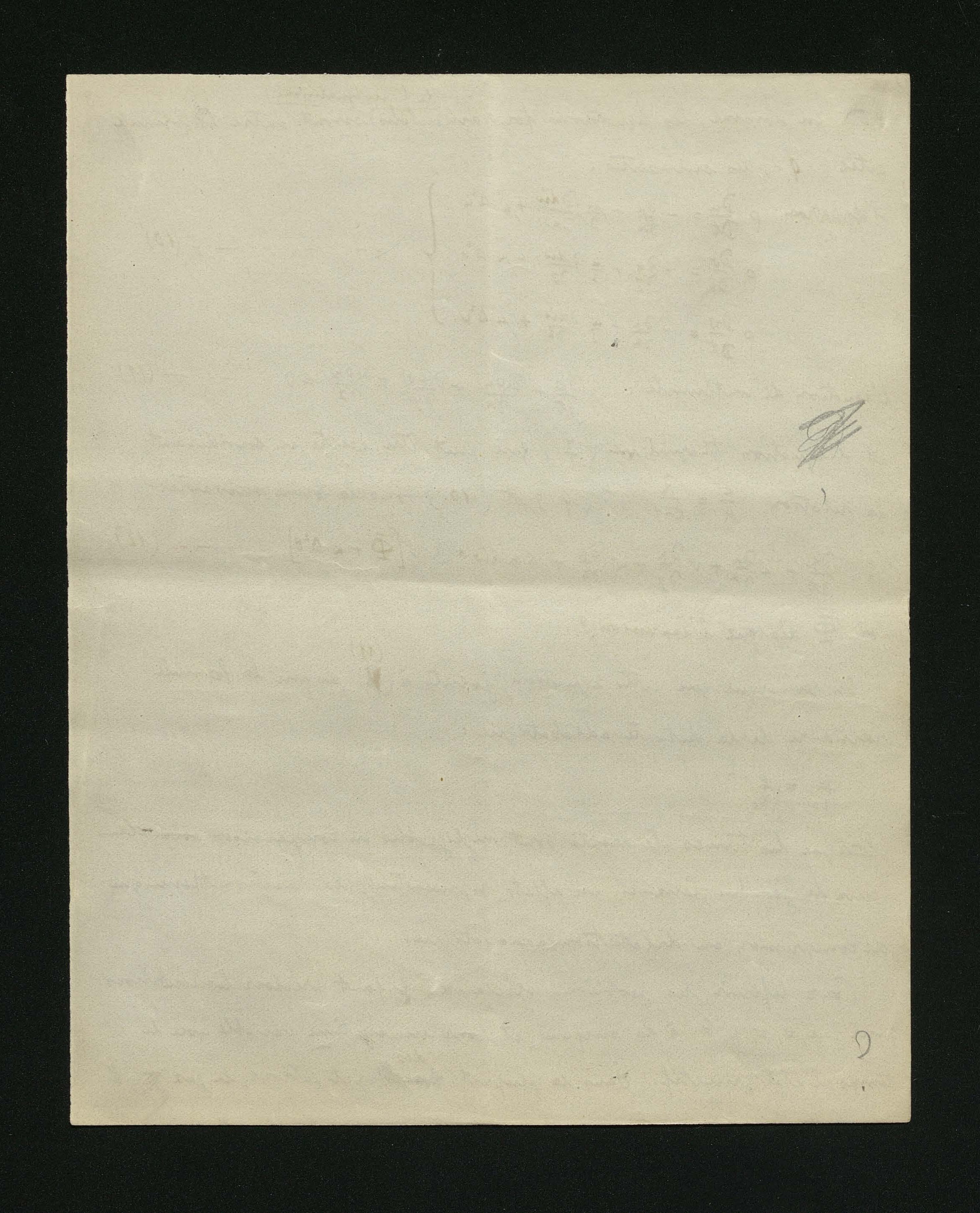
où Φ désigne l'expression (8).

On remarque que cette équation, jointe à (~~[illegible]~~ 11) donne la formule ordinaire de la détente adiabatique :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$$

~~lorsque~~ dans le cas où les termes ~~de droite~~ du second membre sont négligeables en comparaison ~~avec~~ de ceux de ~~gauche~~ premier. Ceux-ci, en effet, représentent la réaction thermique de la compression ou de la dilatation adiabatique.

Pour définir des problèmes spéciaux, il faut préciser les conditions pour u, v, w, p, θ à la surface, et, pour un système variable avec le temps, l'état primitif. Dans la plupart des applications, le gaz



est contenu dans des parois solides, et dont la température est approximativement constante*), u, v, w doivent être supposés nuls sur ces parois conformément aux expériences qui ont démontré l'adhésion complète des couches superficielles.

Dans le cas d'un mouvement stationnaire, l'équation (11) donne:

div = 0 pour ces surfaces, d'où résulte, la direction normale étant prise pour axe des Z et la vitesse normale étant désignée par v_n: $\frac{\partial v_n}{\partial \zeta} = 0$; c'est-à-dire que la direction des lignes de flux dans les couches superficielles est parallèle à la surface.

En désignant la vitesse dans cette direction par V, on trouve que l'équation (12) se réduit à la surface à

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = -\kappa\, \Delta^2\theta \quad \ldots (13)$$

Près des parois, par conséquent, l'effet thermique de compression ou de dilatation disparaît, tandis que la production de chaleur par frottement, balancée par la déperdition en vertu de la conductibilité y joue le rôle principal.

Dans un gaz pour lequel le coefficient de conductibilité calorifique κ serait égal à zéro, un mouvement stationnaire serait impossible, puisque les couches superficielles se réchaufferaient sans cesse. Cela suffit pour démontrer qu'on n'est pas en droit en général, de

*) Des différences de température entre des parties diverses des parois produiraient des courants de convection. Voir: Oberbeck [Wiedem. Ann. 7 p. 271 (1876)], Lorenz [Wied. Ann. 13 p. 582 (1881)]

traiter la viscosité et la conductibilité comme facteurs secondaires.

II Théorèmes généraux sur la symétrie et la similitude dynamiques.

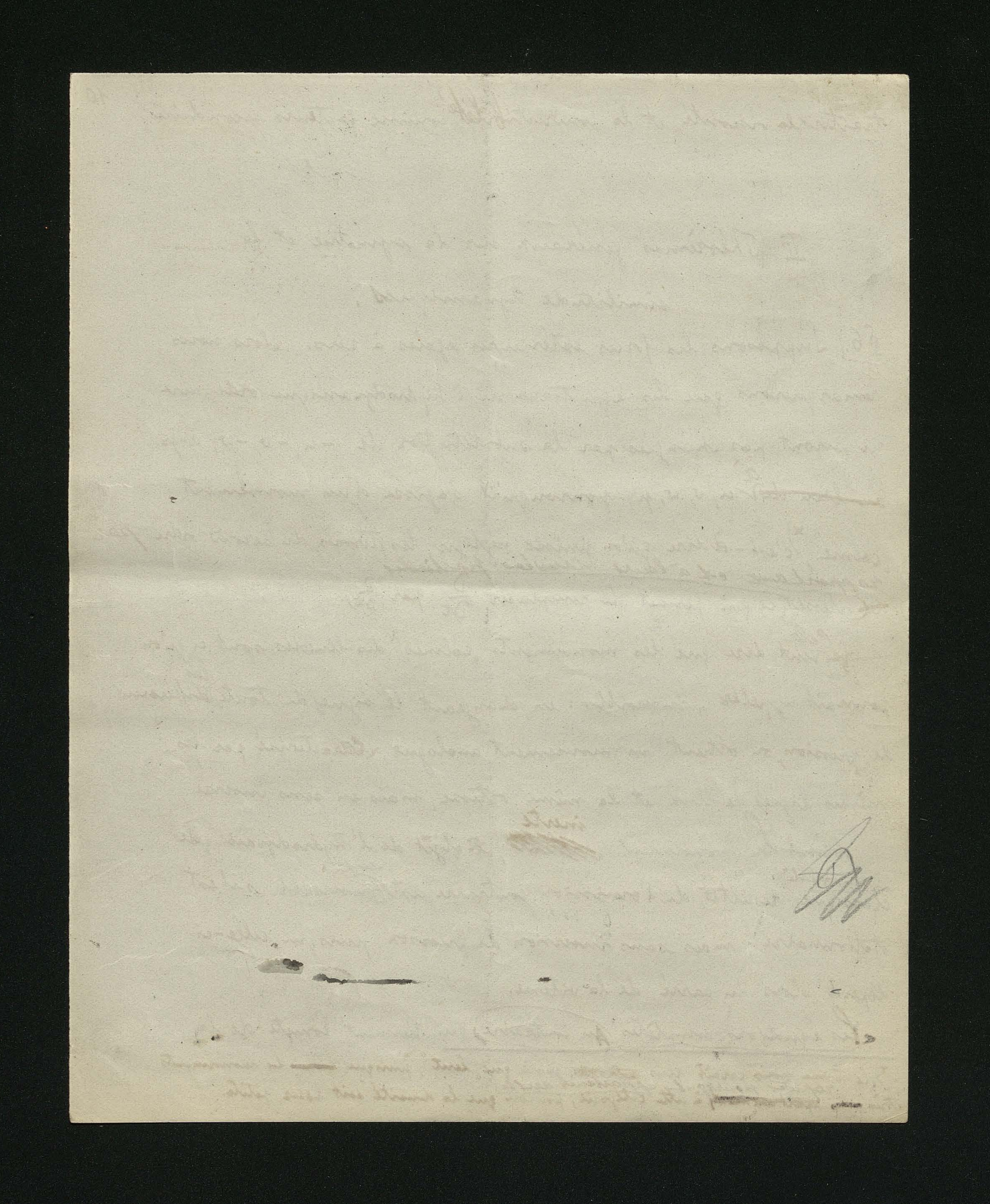
§6. Supposons les forces extérieures égales à zéro. Nous remarquerons que les équations de l'Hydrodynamique ordinaire ne seront pas changées par la substitution de $-u, -v, -w, a-p$, à u, v, w, p, pourvu qu'il s'agisse d'un mouvement „calme"*), c'est-à-dire pourvu qu'on puisse négliger les termes du second ordre par rapport aux vitesses et à leurs dérivées partielles (ce qui permet de remplacer $\frac{D}{Dt}$ par $\frac{\partial}{\partial t}$).

Cela veut dire que les mouvements „calmes" des fluides sont ce qu'on pourrait appeler „renversables": en changeant les signes de toutes les différences de pression, on obtient un mouvement analogue, caractérisé par les mêmes lignes de flux et la même vitesse, mais en sens inverse.

Le mouvement „inerte", objet de l'Hydrodynamique classique (ou „idéale") qui résulte de l'omission contraire, est aussi renversable, s'il est stationnaire; mais sans inversion de pression, puisque celle-ci dépend alors du carré de la vitesse.

Les équations complètes au contraire, qui tiennent compte de la

*) Ce terme nous paraît plus juste que „lent", puisque des mouvements très rapides peuvent appartenir aussi à cette catégorie, pourvu que la densité soit suffisamment petite.



viscosité et de l'inertie, correspondant aux mouvements violents ne sont pas réversibles.

Notons aussi cette conclusion : si le liquide s'écoule par un tube ou par une ouverture dans une paroi, symétrique par rapport au plan VZ situé dans cette paroi, les lignes de flux seront aussi symétriques (fig. 1), lorsque le mouvement est calme. Si la différence de pression augmente à un tel degré que le mouvement devient „violent", celui-ci devient asymétrique, ce qui explique la tendance des liquides à former des jets et des tourbillons dans des cas pareils (fig. 2)

fig 1.

fig 2.

Il est vrai que Helmholtz*) ne voyait pas d'autre hypothèse propre à expliquer la formation des jets que celle de l'existence des „surfaces de discontinuité"; je crois cependant, que l'asymétrie mentionnée y suffit pleinement ; c'est ce que j'ai l'intention de démontrer en détail dans un autre travail, en appuyant mon opinion de considérations théoriques et de données expérimentales.

*) „Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen" Berl. Akad. Ber. 1868 p. 215; Ges. Abh. I p. 146

Π permettent point de procéder par la méthode de l'inversion dont il a été question plus haut.

Carry ten [illegible]

Dans l'aérodynamique, la valeur absolue de la pression entre aussi dans le calcul des équations (9) et (12), qui par conséquent, ne ~~peuvent pas être invariantes~~. Ici l'asymétrie est un phénomène très général; mentionnons le „jet" de gaz se formant, si celui-ci s'écoule sous forte pression *), la formation des tourbillons annulaires de fumée (d'après la méthode de Tait) les mouvements asymétriques et les tourbillons autour d'un corps projeté (Mach). w. d. c.

(C'est seulement pour des mouvements très calmes, avec des différences de pression très petites, qu'il y aura des cas de symétrie approximative (voir par exemple au § 28).

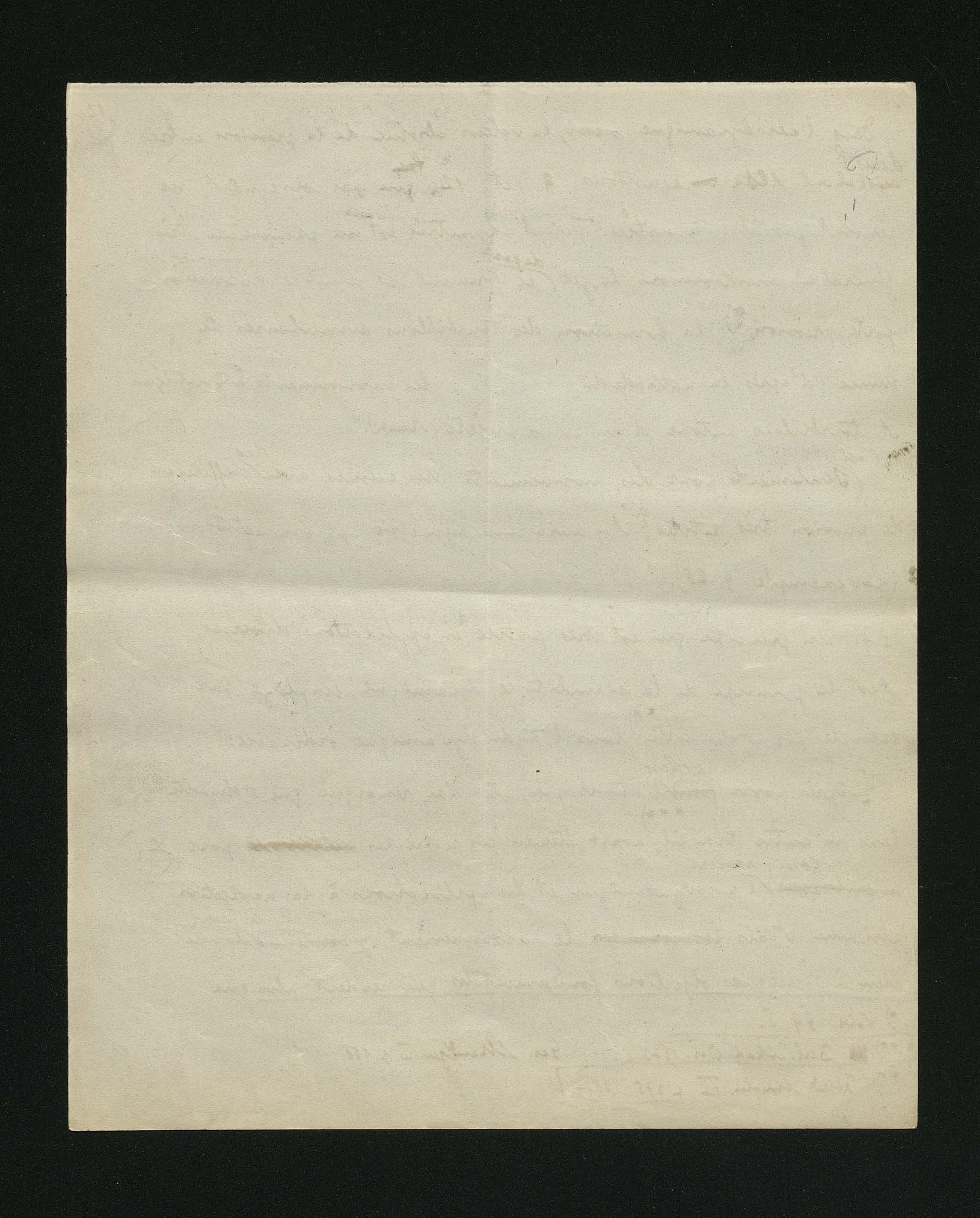
§7. Un principe qui est très fertile en applications diverses, c'est le principe de la similitude dynamique, employé par exemple par Helmholtz **) dans l'hydrodynamique ordinaire:

[Après avoir achevé la présente étude, j'ai remarqué que Helmholtz, dans un second travail ***), avait étendu ses recherches pour y comprendre l'aérodynamique et les applications à la navigation aérienne. Mais le raisonnement dont il se sert donne lieu à quelques objections fondamentales, qui rendent plus que

*) Voir §9, 8.

**) Berl. Akad. Ber. 1873 p. 501; Ges. Abhandlgn. I p. 158

***) Wied. Annalen VII p. 375 (1879)



douteuses ~~les~~ ses conclusions définitives.)

(En dehors d'une erreur numérique [~~les~~ le rapport des coefficients de viscosité $\frac{\mu}{\rho}$ pour l'air et l'eau ~~ne sont pas en raison de~~ n'est pas 0·8082 mais ~~de~~ 8·082] qui change complètement les résultats quantitatifs, nous mentionnons ~~…~~ trois points importants : 1). l'omission complète de l'influence de la température dans les équations fondamentales 2). la compressibilité de l'air ~~était~~ y est négligée dans le cas d'un ballon ~~colossal~~ énorme, se mouvant avec une vitesse de 9 $\frac{m}{sec}$ 3). la viscosité, ~~qui~~ est négligée dans le même cas et dans le cas analogue d'un ~~navire~~ bateau dans l'eau. L'importance du point dernier est mise en évidence par le résultat bien connu, qu'une sphère animée d'une vitesse constante ne subirait point de résistance dans un liquide sans viscosité.

(Je crois que l'on ne peut pas étendre la notion de „similitude" à de cas ~~si~~ autre différents que ces deux-là.*) Ce terme sera employé dans ce qui suit, d'une façon différente, au sens stricte du terme [*]

Lorsqu'on connaît la solution d'un problème donné, on peut se demander, si les mêmes équations ne peuvent pas être satisfaites ~~par des les valeurs~~ en substituant

*) Une partie considérable de la résistance d'un ~~navire~~ bateau provient de la formation des ondes, qui dépendent, évidemment, de la gravité; sous ce rapport il n'y a aucune analogie avec un ballon.

les valeurs $n\,x$ ~~au lieu de~~ à x (de même pour y, z)

$m\,u$ " u (" " " v, w)

$b\,p$ " p

$h\,\theta$ " θ

$\frac{n}{m}\,t$ " t

— ~~Les~~ conditions nécessaires et suffisantes qui résultent de la substitution de ces variables en (10) et (12) ~~est l'existence des identités~~ sont les suivantes

(de 10): $\frac{b}{h}\frac{m^2}{n} \equiv \frac{b}{n} \equiv \frac{m}{n^2}$

(de 12): $\frac{m\,b}{n} \equiv \frac{m^2}{n^2} \equiv \frac{h}{n^2}$

qui se réduisent à deux identités indépendantes*) entre quatre variables:

$$h \equiv m^2 ; \qquad b \equiv \frac{m}{n} . \qquad \text{— — — — —} \Big\} \; (14)$$

Voici des exemples particuliers, qui mettront en évidence l'importance pratique de cette similitude dynamique:

§ 8. ~~Mettons~~ Posons $n = 1$ (donc $b = \sqrt{h} = m$): Dans le même ~~vaisseau~~ vaisseau, il y aura un mouvement tout-à-fait analogue au mouvement primaire, lorsque les pressions seront élevées en proportion de ~~m et les~~ la racine de la températures [illegible]; les vitesses alors seront ~~m fois plus grandes~~ élevées dans la même proportion.

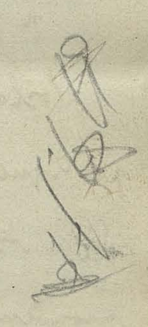
α) Ainsi la vitesse du son, qui est donnée par $c = \sqrt{kR\theta}$, indépendamment de la pression, augmente en ~~proportion~~ raison de la racine de la température. Mais cette formule n'est exacte

---

*) ~~Lorsque~~ Si l'on tient compte de la variabilité des coefficients μ et κ, en les supposant proportionnels à θ^α, on doit remplacer l'équation (14, 2) par $b \equiv \frac{m^{2\alpha+1}}{n}$

F si l'on n'adopte point ces hypothèses simpli-

ficatrices !



que pour des amplitudes très petites et comporte ~~avec~~ l'omission des effets de viscosité et de conductibilité; ~~autrement~~ on aura une formule compliquée, dans laquelle entrera aussi la pression. ~~Tout de même~~ Notre conclusion restera pourtant exacte, pourvu qu'on la rapporte à des sons, dont le nombre de vibrations est proportionnel à $\sqrt{\theta}$ et pourvu qu'on mesure la vitesse pour des pressions correspondantes ~~en même proportion~~ [proportionnelles à $\theta^{\frac{2\kappa+1}{2}}$ dans le cas général]. Elle s'applique aussi à la propagation dans des tuyaux étroits.

β). La résistance (dimension x^2p) qu'éprouve un corps se mouvant avec une petite vitesse ~~petite~~, est à peu près proportionnelle à celle-ci. Ceci est exact (pour des vitesses quelconques) si la pression ~~densité~~ s'élève ~~décroît~~ ~~simultanément~~ en raison de la vitesse ~~inverse~~ et la température ~~s'élève~~ dans une proportion quadratique ~~en raison du carré de la vitesse~~.

γ). Applications semblables à l'~~afflux des gazes~~ écoulement des gaz.

§ 9. ~~Mettons~~ Posons $h=1$; par conséquent $m=1$, $b=\frac{1}{n}$: la température reste invariable; la vitesse (aussi sera) la même dans deux vaisseaux ~~vaisseaux~~ semblables, dont les dimensions sont en raison inverse des pressions du gaz.

δ). En effet, il est facile de voir ~~on voit facilement~~ que la formule approximative de Kirchhoff pour la vitesse du son dans des tuyaux étroits (rayon r):

$$v=\sqrt{\frac{kp}{\rho}}\left[1-\frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi N}}\right]; \quad \text{où } \gamma=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}+\sqrt{\frac{\kappa}{c\rho}}\left[\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right];$$

satisfait à cette proposition, (en considérant que N doit être changé

applicable que dans le cas du

jusqu'à présent
à expliquer ce phénomène.

en raison inverse des dimensions).

β). La formule de Poiseuille-Meyer:

$$M = \frac{p_2 - p_1}{l} \cdot \frac{R^4 \pi}{8\mu} \qquad (15)$$

n'est ~~exacte que pour le~~ mouvement „calme" dans un tube long et étroit. Notre théorème démontre que son application à un tube de dimensions n fois plus grandes n'est justifiée que lorsque les pressions sont diminuées en raison inverse *). ~~Alors~~ Dans ce cas, la vitesse sera la même, le volume qui s'écoule sera augmenté proportionnellement ~~en raison de~~ à n^2. Mais ce résultat ne dépend pas de la validité de la formule (15) et n'est même pas limité au flux stationnaire (ni aux mouvements „calmes"); il peut être appliqué par exemple à ~~l'afflux de~~ l'écoulement d'un gaz d'un vase clos par une ouverture.

γ). La résistance de corps, de différentes grandeurs mais semblables, projetés avec une certaine vitesse dans un gaz de pression inverse à leurs dimensions, sera proportionnelle à celles-ci.

Un mouvement ~~gazeux~~ semblable très ~~vite~~ rapide cause des sons sibilants (Reibungstöne); ~~phénomène auquel~~ la théorie est restée impuissante ~~jusqu'ici~~. Néanmoins, nous pouvons prédire que le nombre des vibrations, ~~dans ces circonstances,~~ sera ~~[illegible] proportionnel à l'inverse [illegible]~~ en proportion inverse des dimensions des corps, si la pression ~~devient~~ est réduite ~~en~~ dans la même ~~raison~~ proportion (puisque N a la dimension de $\frac{u}{x}$).

*) Tandis que dans l'hydrodynamique il ~~est nécessaire~~ faut d'après Helmholtz une diminution de la pression en raison de $\frac{1}{n^2}$, puisqu'il n'y existe qu'un ~~sorte de~~ genre de similitude: $b \equiv n^2 \equiv \frac{1}{n^2}$

F énoncée par ce savant

– (En effet) Une loi ~~pareille~~ semblable a été établie par Strouhal*) ~~par ses~~ dans ses recherches sur les sons qui accompagnent le mouvement rapide ~~vite~~ d'un cylindre (tube de verre, fil métallique etc.) dans l'air; ~~mais~~ La loi empirique ~~est plus~~ détaillée ~~encore, parce qu'elle~~ prétend que: le nombre des vibrations dans l'air à la ~~de~~ pression atmosphérique est proportionnelle à la vitesse, divisée par le rayon du cylindre:

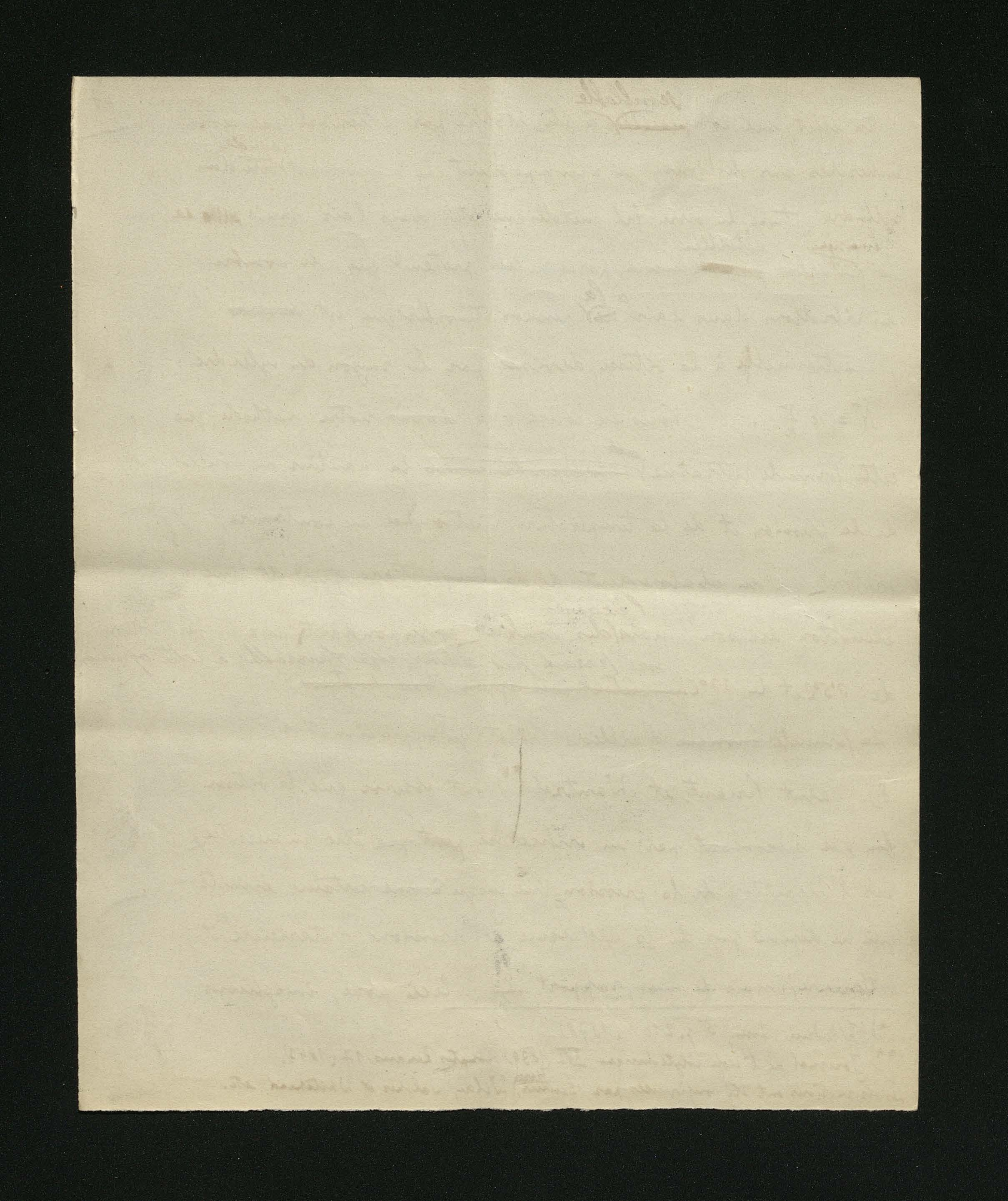
$N = c \frac{v}{r}$. Nous en concluons par ~~d'après~~ notre méthode, que cette formule entraîne la conclusion que la hauteur du son est indépendante de la pression et de la température. Strouhal, au contraire, prétend qu'un abaissement de la température produit une élévation du son, mais l'examen des nombres correspondants aux températures de 9.5°C et de 37°C ne paraît pas devoir être favorable à cette opinion ~~y prêtent un appui très douteux~~.

La formule citée ~~énoncée~~ (d'ailleurs) n'est qu'une relation approximative.

8). Saint Venant et Wantzel**) ont observé que la vitesse d'un gaz qui s'écoule par un orifice ne peut ~~pas~~ être augmentée par l'élévation de la pression que jusqu'à une certaine limite, qui ne dépend pas de la différence des pressions, intérieure p_2 et extérieure p_1, mais de leur rapport $\frac{p_2}{p_1}$. Ceci posé, imaginons

*) Wiedem. Ann. 5 p. 216 (1878).

**) Journal de l'École polytechnique XVI (1839), Comptes Rendus 17 (1843).
Les observations ont été confirmées par Zeuner, Hirn, Wilde, Salcher et Whitehead etc.



deux expériences exécutées avec le même orifice, mais avec des pressions différentes, où cette valeur critique a été atteinte : (1) $\frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1}$ (2).

~~Or~~ Le mouvement caractérisé par p_2 et p_1 sera semblable au cas (3), où les pressions sont P_2, P_1 et où les dimensions de l'orifice ont été diminuées en raison de $\frac{p_2}{P_2} = \frac{p_1}{P_1}$. Puisque la vitesse ne change pas, la comparaison avec la deuxième expérience nous ~~enseigne~~ apprend que la vitesse sera indépendante des dimensions de l'orifice.*)

Cette conclusion, qui est la conséquence de l'existence d'un rapport critique $\frac{p_2}{p_1} = 1{\cdot}89$, s'accorde avec les résultats des expériences.

Mach et Salcher**), et Emden***) ont remarqué la formation de cannelures dans le jet d'un gaz qui s'écoule, aussitôt que le rapport des pressions dépasse la valeur critique. Emden explique ce phénomène par des changements de densité correspondant à un train d'ondes sonores fixes. La mesure des distances des cannelures lui a ~~fourni~~ suggéré la formule empirique

$$\lambda = 0{\cdot}88\, d \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1{\cdot}9}$$

où d est le diamètre de l'orifice ~~p_1, p_2 les pressions~~

~~Abstraction faite de ce résultat~~ On sait que dans un autre cas semblable,

*) Égale approximativement à la vitesse du son (voir Lamb, Hydrodynamics p. 28)

**) Sitzungsber. d. Wien. Akad. 98 (1889), Wiedem. Ann. 42 p. 144 (1890)

***) Wiedem. Ann. 69 p. 264, 426, 453 (1899).

où les valeurs correspondantes sont D, $p_1 \frac{d}{D}$, $p_2 \frac{d}{D}$, la longueur λ changera en $\lambda \frac{D}{d}$. On ne saurait ~~pas~~ déterminer λ à priori dans un cas (troisième), où ~~on aurait~~ les valeurs D, P_1, P_2 satisferaient à la relation

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \frac{d}{D}}{p_2 \frac{d}{D}} = \frac{p_1}{p_2}$$

mais si l'on a établi le fait que λ ne dépend pas des valeurs absolues des ~~p~~ pressions, mais seulement de leur rapport, on sait que cette grandeur conserve la valeur $\lambda \frac{D}{d}$. C'est-à-dire qu'on aura établi la proportionnalité de λ avec les dimensions de l'orifice en général : $\lambda = d \, fc.\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$, ~~et~~ sans avoir eu besoin d'entreprendre des expériences spéciales ~~là dessus~~ à ce sujet.

9. L'exemple suivant (aussi) servira à démontrer l'utilité de la ~~cette~~ méthode en question :

Kohlrausch *) a fait ~~une~~ des recherches sur les sons qui naissent dans un gaz, passant par une ~~fissure~~ fente étroite (Spaltentöne). — Les mesures s'étendaient ~~sur~~ à la dépendance entre le nombre des vibrations N ~~et~~, la largeur de la fente s et la pression p_1 du gaz dans le réservoir. Comme celui-ci s'écoulait dans l'atmosphère libre, l'influence de la pression extérieure p_2 ne pouvait pas s'y manifester. Mais nous pouvons ~~prédire~~ déterminer à priori la manière dont elle se manifestera. Ce que nous cherchons, c'est la formule générale

*) Wiedem. Ann. 13 p. 545 (1881).

$N = f(s, p_1, p_2)$, dont le résultat empirique de Kohlrausch:

$N = f(s, p_1, p_0) = \varphi(s, p_1)$, avec p_2 = pression atmosphérique constante, égale à p_0, est un cas particulier.

(Profitons de la similitude du mouvement s, p_1, p_2 avec celui, où ces variables ont les valeurs $s\frac{p_2}{p_0}$, $p_1\frac{p_0}{p_2}$, p_0, et où nous aurons $N_0 = \varphi\left(s\frac{p_2}{p_0}, p_1\frac{p_0}{p_2}\right)$. Les nombres des vibrations dans ces deux cas seront en raison inverse du temps [comme au §8, α, γ, et au §9, α] c'est-à-dire: $N_0 : N = p_0 : p_2$, et par conséquent, on aura le résultat cherché:

$$N = \frac{p_2}{p_0}\,\varphi\left(s\frac{p_2}{p_0}, p_1\frac{p_0}{p_2}\right) = f(s, p_1, p_2)$$

D'une manière analogue (voir §8) on pourrait trouver l'effet d'un changement de température. Il est à regretter, qu'on ne puisse pas utiliser de cette façon les mesures de Kohlrausch, parce qu'elles ne contiennent pas des valeurs explicites de p_1, mais seulement les vitesses moyennes U, qui en dépendent, et parce que les résultats, condensés dans la formule approximative $N = A(U-B)$ et dans un tableau des valeurs de a, B, en fonction de la variable s, ne fournissent pas la loi finale sous une forme explicite.

§ 10. Le troisième cas spécial $b = 1$, $m = 1$ de la similitude, ainsi que les modifications produites par la dépendance de la viscosité de la température, présente moins d'intérêt.

Notons encore, qu'il n'y a qu'un genre de similitude ~~...~~ ~~...~~ lorsque la pesanteur intervient comme force extérieure :

$$m \equiv \sqrt{n}\ ; \quad h \equiv n\ ; \quad b \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;$$

c'est ce qui peut être appliqué aux courants de convection, qui naissent par suite de différences de température.

§ 11. La similitude dynamique, s'applique-t-elle aussi aux mouvements de gaz différents ? Pour trancher cette question, on changera dans les équations (10, 12) aussi les coefficients R, k, μ, κ. Évidemment, par suite de (12), toute similitude est exclue pour des gaz pour lesquels les valeurs de k sont différentes.

Donc supposons k égal, et posons αR au lieu de R
$\beta\mu$ " μ
$\gamma\kappa$ " κ

On trouve les conditions suivantes :

(de 10) : $$\frac{b}{\alpha h}\frac{m^2}{n} \equiv \frac{b}{n} \equiv \beta\frac{m}{n^2}$$

(de 12) : $$\frac{m\,b}{n} \equiv \beta\frac{m^2}{n^2} \equiv \gamma\frac{h}{n^2}$$ qui se réduisent à

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} \equiv 1\ ; \qquad \alpha h \equiv m^2\ ; \qquad n\,b \equiv m\beta. \qquad \Big\} \text{- - - - (16)}$$

Comme R est proportionnel à l'inverse du poids moléculaire M, il résulte de la première de ces identités que la similitude n'est possible que pour des gaz (pour lesquels) la valeur de la constante $\frac{\mu}{\kappa M}$ est la même.

Le tableau suivant des coëfficients $\frac{k}{\mu}$ (~~relat~~ rapportés ~~[premiers]~~ à l'air) multipliés par M, prouve que cette condition est satisfaite pour plusieurs gaz avec une approximation remarquable :

$k = 1'4$	H_2	O_2	N_2	CO	NO
$\frac{kM}{\mu}$	$\frac{6'7.2}{0'50} = 27$	$\frac{1'0.32}{1'1} = 29$	$\frac{1'0.28}{0'97} = 29$	$\frac{0'98.28}{0'97} = 28$	$\frac{0'95.30}{0'98} = 29$

$k = 1'3$	CO_2	N_2O	CH_4	NH_3
$\frac{kM}{\mu}$	$\frac{0'64.44}{0'82} = 34$	$\frac{0'67.44}{0'82} = 36$	$\frac{1'37.16}{0'62} = 35$	$\frac{0'92.17}{0'57} = 27$

Voilà ~~des exemples~~ ci quelques applications ~~à quelques problèmes spéciaux~~ ~~spéciales~~ des considérations précédentes :

§12. Posons $h = 1$, $b = 1$; donc $m^2 = \alpha$, $n = m\beta = \beta\sqrt{\alpha}$: —

— Pour une certaine température et une certaine distribution de pression, il y a des mouvements ~~spéciales~~ semblables dans deux vases ~~vaisseaux~~ semblables, dont les dimensions sont proportionnelles ~~[...]~~ aux coëfficients $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ des gaz renfermés ; ~~alors~~ les vitesses seront alors proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

a). En ~~tirant~~ rapprochant ce théorème ~~avec~~ de la loi (approximative) de Graham et Bünsen, qui ~~prétend~~ admet la proportionnalité ~~(approximative)~~ du volume des différents gaz ~~différents~~ passants à travers une ouverture dans une lame mince, à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, on en déduit le résultat (suivant) : ~~que~~ la quantité du gaz s'écoulant par des ouvertures différentes — à constante différence de pression —

est proportionnelle à la surface de l'ouverture.

β). Supposons un conduit long et étroit, qui serait traversé par des volumes ~~des~~ de gaz différents, proportionnels à leur coefficient de fluidité $\frac{1}{\mu}$. —

— Notre théorème ~~établit la conclusion~~ prouve que le volume du gaz, passant par de ~~telles~~ ~~tels~~ conduits semblables, sera proportionnel ~~le~~ au cube de leurs dimensions linéaires. ~~C'est un~~ Ce résultat est plus général, en quelque sorte, que la formule de Poiseuille-Meyer *) qui ~~l'affirme~~ s'applique dans le cas ~~spécial~~ particulier d'un tube régulier circulaire.

γ). Un raisonnement analogue concernant des corps projetés montre que la pression de résistance sera proportionnelle à leurs dimensions linéaires, si l'on suppose que, pour des gaz différents, elle change en raison du produit de la viscosité et de la vitesse ~~;~~ et qu'elle sera proportionnelle aux dimensions superficielles, si le produit de la densité et du carré de la vitesse en définit la valeur.

~~Ces derniers résultats ne sont pas nouveaux, mais leurs relations aux suppositions primaires sont bien mises en évidence par cette simple méthode, qui par son exactitude diffère des calculs usuels approximatifs, et qui donne des indications quand il faut s'attendre à un écart des formules.~~

~~Encore~~ Citons un autre exemple:

δ). Joule et Kelvin *) ont mesuré l'élévation de température $\Delta\theta$

*) Kelvin, Mathem. Phys. Papers I p. 400, 445.

que subissent des corps (thermomètres, fils formant~~s~~ des couples thermoélectriques) qui travers~~ent~~ l'air avec une certaine vitesse. ———

— ~~Leurs~~ Les expériences des Savants anglais démontrent la proportionnalité très approximative de $\Delta\theta$ au carré de la vitesse [comprise entre 30 $\frac{m}{sec}$ et 100 $\frac{m}{sec}$] et son indépendance de la forme et de la grandeur du corps [à peu près 1°C. par 55 $\frac{m}{sec}$].

Imaginons 1). un corps donné, dont la vitesse serait v, dans l'air 2). un deuxième, pareil, dans un autre gaz 3). un troisième dans le gaz dernier, à dimensions augmentées en raison de $\frac{\mu}{\mu_0}\sqrt{\frac{M_0}{M}}$, et doué d'une vitesse ~~diminuée en raison~~ $v\sqrt{\frac{M_0}{M}}$; en appliquant notre théorème à la comparaison des corps 1–3, le résultat empirique de Kelvin à la comparaison des corps 3–2, nous pouvons ~~p~~ dire que : dans des gaz différents (mais ~~distingués~~ ~~qui diffèrent~~ pour lesquels k ~~a~~ a ~~pas~~ la même valeur ~~de k~~) un corps animé de la vitesse v s'échauffera proportionnellement à la quantité ~~en mesure de~~ $\Delta\theta = a M v^2$, ——— w. d. c.

c'est-à-dire en raison du poids spécifique du gaz et du carré de la vitesse. Il résulte ~~En outre de~~ ~~De~~ l'application des théorèmes du §8 et du §9 ~~résulte, en outre,~~ le résultat inattendu que la constante a est indépendante de la pression du gaz et de sa température. ~~…~~

Si ~~l'extrapolation~~ l'extension de cette formule ~~pour~~ à des vitesses supérieures à la vitesse du son était permise, on pourrait évaluer, par exemple, l'échauffement d'un météore traversant l'air à une vitesse

de 2·8 km à 2500° C.

Il faut noter que la formule empirique ne s'applique plus aux vitesses petites (moindres que 30 $\frac{m}{sec.}$), mais les mesures n'étaient pas ~~suffisantes~~ suffisamment exactes pour mettre en évidence ~~la~~ ~~cette~~ ~~modification~~ les écarts de la loi en question.

§ 13. ~~Supposition :~~ ~~Fa~~ Supposons : $h = 1$, $n = 1$; donc : $m = \sqrt{\alpha}$, $b = \beta\sqrt{\alpha}$:

Même ~~vaisseau~~ vase ; même température ; les mouvements de différents gaz seront semblables, pourvu que les pressions soient en raison de ~~[illegible]~~ $\frac{n}{\sqrt{M}}$; alors les vitesses (et les volumes) seront proportionnels à $\frac{1}{\sqrt{M}}$. (§ 4 α). En effet, cette proposition ~~est remplie par~~ s'accorde avec la formule ordinaire pour la vitesse du son, et aussi ~~par~~ avec la formule de Kirchhoff [§ 9α, —] pour des tuyaux. De plus,

~~Aussi~~ On voit ~~on~~ facilement que la formule de Strouhal (§ 9 γ), pour la hauteur du son produit par le mouvement d'un corps cylindrique, entraîne l'identité de la constante c pour les divers gaz ~~divers~~, c'est-à-dire (c'est indépendant ~~du~~ que le son) de la qualité du gaz. —

— Nous ne connaissons pas encore d'expériences ~~là-dessus~~ à ce sujet. —

— De même que Emden, ayant établi la formule (§ 9 δ) pour l'air, aurait pu ~~conclure~~ en conclure à priori, que la largeur des cannelures λ ~~sont~~ est indépendante de la nature du gaz, ce qu'ont démontré ses expériences, ~~ainsi comme~~ de même nous pouvons prédire (d'après § 8) qu'on la trouvera indépendante de la température. — w.d.c.

F sur laquelle elle repose

~~Ainsi donc~~ Des semblables considérations ~~pareilles~~ peuvent souvent faciliter les recherches expérimentales et ~~en~~ étendre la portée des résultats obtenus.

β). Le rapport du volume d'un gaz qui s'écoule ~~nt~~ à ~~la~~ l'action différence de pression sera, pour des gaz différents, proportionnel à leur fluidité:

$$\frac{V}{p_1-p_2} \sim \frac{1}{\mu}\,,$$ si l'on y emploie des pressions correspondantes.

En vertu de cette conclusion, on peut ~~introduire~~ appliquer un procédé plus exact ~~dans le~~ aux mesures de la viscosité. —— w. d. c. ——

— La formule de Poiseuille-Meyer $\frac{V}{p_1-p_2} = \frac{R^4\pi}{8L}\frac{1}{\mu}$ ne tient compte ni de l'inertie du gaz, ni de l'effet visqueux de la variabilité de la vitesse le long du tube, ni des différences de température (§ 27). (Pourtant on peut trouver la valeur exacte de la viscosité relative ; en n'employant ~~pas~~ des pressions non pas quelconques, mais des ~~pressions~~ proportionnelles à $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ pour les (gaz divers). Il est remarquable que ce résultat ~~subsiste~~ est indépendant ~~ment~~ de la forme du tube ou de l'orifice, et qu'il subsiste même pour l'~~effusion~~ écoulement par un trou dans une lame mince.

γ). ~~Aussi~~ La méthode de Maxwell-Meyer des „disques oscillants" qui n'est pourtant pas ~~sans~~ à l'abri des objections, à cause de l'inexactitude de la théorie mathématique peut aussi servir à des mesures exactes de la viscosité; seulement il faut y employer des pressions correspondantes, et la

suspension du disque doit varier de ~~telle~~ sorte qu'on puisse produire des durées ~~un temps~~ d'oscillation proportionnelles à $\sqrt{M}$.

Évidemment, tout ce qui a été dit s'applique ~~en toute~~ rigoureusement, ~~seulement~~ sous la condition seulement que k et $\frac{kM}{\mu}$ soient égaux ~~pour les~~ aux gaz comparés, et même ~~mais aussi~~ lorsqu'il y a des petites différences, ces ~~pareilles~~ mesures seront plus exactes que d'après les méthodes ordinaires.*)

*) On en pourrait profiter pour élucider la cause des divergences qui existent entre les résultats donnés par les deux méthodes mentionnées, problématique jusqu'à présent. [Schumann Wied. Ann 23 p. 353 (1884)]

III. Phénomènes thermiques d'écoulement.

§ 14. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer nos équations à l'examen des phénomènes thermiques qui se manifestent dans un gaz s'écoulant par des tubes ou des orifices, phénomènes qui ont fait le sujet des célèbres recherches de Joule et de Kelvin.*) — w. d. c. —

Il est vrai ~~assurément~~, qu'il n'y a pas de doute possible quant à ~~apparemment~~ l'interprétation générale de ces expériences, ~~ainsi qu'elles appartiennent~~ lesquelles sont ~~à l'inventaire~~ classiques ~~de la~~ en Thermodynamique; ~~mais cependant~~ cependant, leur explication détaillée ~~échoue sur des obstacles~~ offre des difficultés qui ne peuvent être ~~vaincues~~ résolues que par une théorie (détaillée) aérodynamique. Ainsi l'explication usuelle (du phénomène Joule-Kelvin) ne ~~prend pas en considération~~ tient pas compte de la

*) Kelvin Mathem. Physic. Papers I p. 333; Joule Mechan. Wärmeäquivalent, Braunschweig 1872.

variabilité de la vitesse et peut être de la température dans les différentes couches du gaz ; on ~~aussi~~ comprend aisément ~~-t-on~~ qu'il y ait ~~aura~~ un abaissement de température dans un gaz qui se dilate ~~s'expand~~, mais la manière dont il se répartira sur le gaz qui s'écoule ~~s'écoulant~~, et sur celui qui reste dans le réservoir, n'est pas ~~certaine~~ évidente.

~~Dans ce but~~, Nous transformerons l'équation (12) en la multipliant par un élément de volume et en l'intégrant sur tout l'espace en question. —

Remarquons, en outre, que

$$\iiint p\,\mathrm{div}\,d\omega = \iint p(ul+vm+wn)\,dS - \iiint\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\omega \quad \ldots\ldots (17)$$

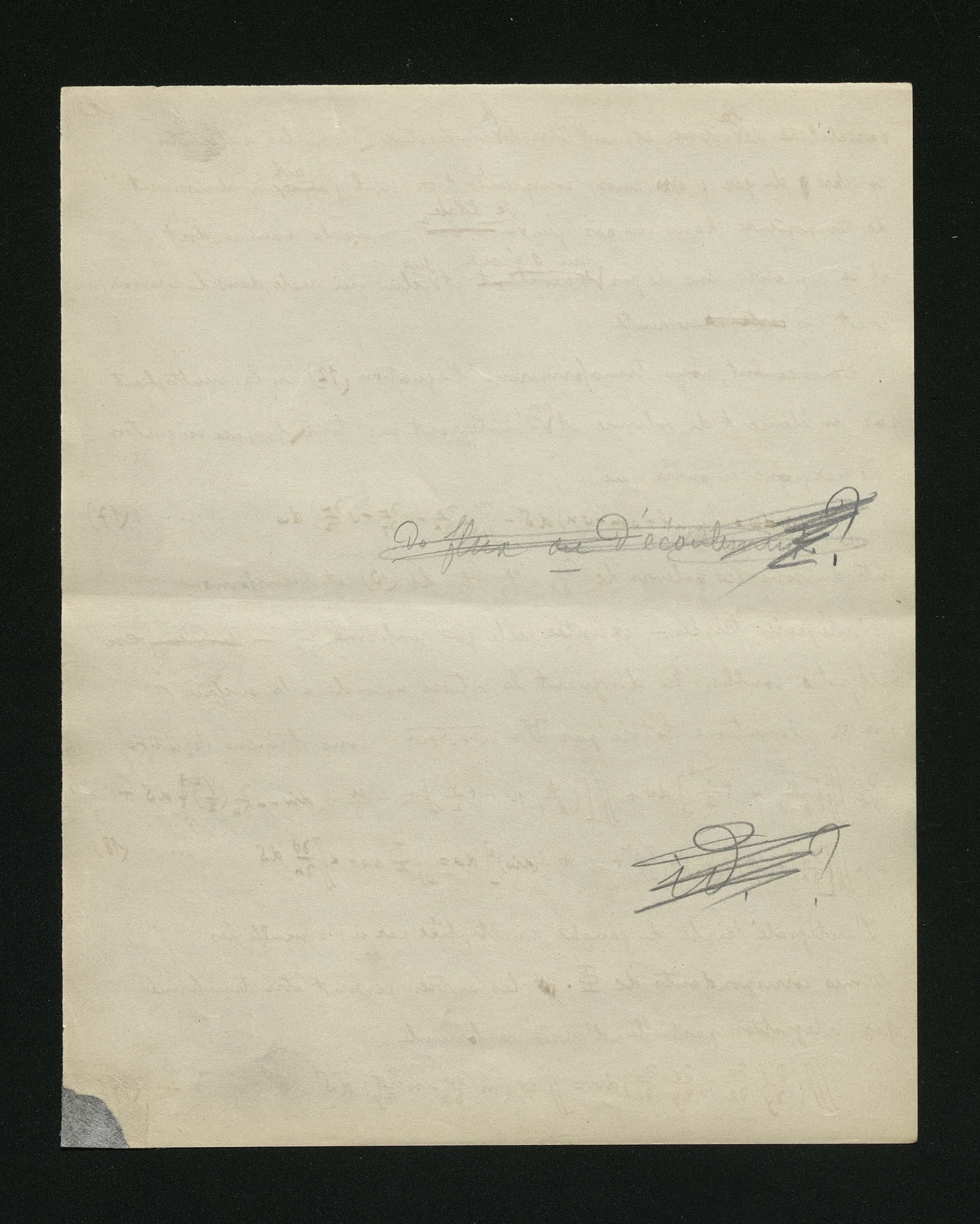
introduisons les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ données par ~~de~~ (10) et transformons les intégrales triples — exceptée celle qui renferme $\frac{\partial}{\partial t}$ — ~~dans des~~ en intégrales doubles. En désignant la vitesse normale à la surface par v_n, la vitesse totale par $V=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\frac{p}{k-1}+\rho\frac{V^2}{2}\right]d\omega + \iint\left\{\left(\frac{k}{k-1}p+\rho\frac{V^2}{2}\right)v_n - \frac{\mu}{3}v_n\,\mathrm{div} - \mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right\}dS +$$

$$+\mu\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}(\mathrm{div})^2\right]d\omega = \iiint\Phi\,d\omega + \kappa\iint\frac{\partial\theta}{\partial n}dS \quad \ldots\ldots (18)$$

L'intégrale triple de gauche multipliée par μ, annulle les termes correspondants de Φ; les autres peuvent être transformés par intégration partielle d'après la formule

$$\iiint\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\omega = \iint w\left(m\frac{\partial v}{\partial z}-n\frac{\partial v}{\partial y}\right)dS \quad \ldots\ldots (19)$$



~~De flux ou d'écoulement~~ ?

~~dans~~ en une intégrale, désignée par l'expression symbolique

$$\iint\left[\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)(ul+vm+wn) - v_n \operatorname{div}\right]dS = \iint\left[\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v_n - v_n \operatorname{div}\right]dS$$

Le résultat final, est l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\frac{p}{k-1}+\rho\frac{V^2}{2}\right]dv + \iint\left\{\left[\frac{k}{k-1}p+\rho\frac{V^2}{2}\right]v_n + \frac{2}{3}\mu\, v_n \operatorname{div} - \mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v_n\right\}dS =$$

$$= \kappa\iint\frac{\partial\theta}{\partial n}\,dS \qquad \ldots\ldots(20)$$

§15. Lorsque le courant du gaz est stationnaire, le premier terme de cette équation disparaît. Le reste, l'intégrale double, peut être appliquée à la surface d'un tube ~~d'écoulement~~ ~~de flux~~ de flux (de longueur s), fermé par deux ~~coupes~~ sections transversales q_1 et q_2. Eu égard à l'équation de continuité, qui prend la forme $\rho v q = \text{const.}$, on aura :

$$\frac{kR}{k-1}(\theta_1-\theta_2) + \frac{V_1^2-V_2^2}{2} + \frac{2}{3}\mu\left[\frac{\operatorname{div}_1}{\rho_1}-\frac{\operatorname{div}_2}{\rho_2}\right] - \mu\left[\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial s}-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial V_2}{\partial s}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho V q}\iint\left[\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)+\kappa\frac{\partial\theta}{\partial n}\right]dS \qquad \ldots\ldots(21)$$

Donc, la différence de température ~~dans~~ ~~deux~~ en deux points de la même ligne ~~d'écoulement~~ ~~de flux~~ de flux est en relation avec les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial s}$ et div et du carré de la vitesse, ~~dans~~ en ces deux points, ~~mais~~ et aussi avec la longueur du chemin entre les deux points, qui définit la valeur ~~de~~ la ~~l'~~intégrale (dernière). Dans les endroits où le gaz se meut avec une lenteur et une uniformité suffisantes, comme par exemple à l'intérieur de deux réservoirs, qui communiquent par un tube étroit, on peut

négliger ces premiers termes, mais on ne peut pas faire de même avec l'intégrale, qui dépendra de la distribution des vitesses et de la température entre ces deux points et qui, en général, ne sera pas négligeable. ~~Ce~~ Cela serait vrai, par exemple, si l'équation

~~Ce serait~~ $\nabla^2\left[\mu\frac{V^2}{2}+\kappa\theta\right]=0$; avait lieu — mais évidemment, ce serait la un cas tout exceptionnel.

A). Donc, on ne peut pas prétendre que la température d'un gaz, s'écoulant d'une manière ~~sta~~ stationnaire, reste invariable; ses différentes couches auront des températures différentes.

§ 16. Le théorème de constance de la température ne s'applique que dans un cas particulier, à la température moyenne.

(Ce que nous appelons température moyenne d'un profil, c'est la température qui s'établirait dans le gaz, passant par une surface orthogonale aux lignes de flux ~~de flux~~, si toutes ses couches étaient mélangées d'une façon complète — c'est à dire:

$$\Theta = \frac{\Sigma\,\theta\rho V_q}{\Sigma\,\rho V_q} \qquad \text{.......(22)}$$

~~où~~

où la sommation s'étend sur tous les éléments de la surface orthogonale.)

(Supposons, ~~par voi~~ pour fixer les idées, que le point 1 soit situé à l'intérieur du réservoir 1, où les conditions de lenteur et d'uniformité du mouvement sont satisfaites. Envisageons

~~23~~

1

~~Vase ?~~

maintenant ~~les~~ équations (21) ou (20) et notons le fait, que les parois du ~~vaisseau~~ réservoir et du ~~tube~~ conduit sont formées par des tubes de flux adhérents, c'est-à-dire qu'on peut développer V — en désignant la distance d'un point des parois par δn — de la façon suivante:

$$V = \delta n \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0, \quad \text{par conséquent:} \quad \frac{\delta}{\partial n}(V^2) = 2\,\delta n \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0^2$$

ce qui disparaît ~~pour~~ à la surface (pour $\delta n = 0$) de même que V.

Donc, on aura pour la température moyenne l'équation

$$\frac{kR}{k-1}\left[\theta_0 - \Theta\right] = \frac{\frac{1}{2}\sum \rho q V^3 + \mu \sum \left(\frac{2}{3}\operatorname{div} + 2\frac{\partial V}{\partial n}\right) q V + \int \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} dS}{\sum \rho q V} \quad \ldots\ldots (23)$$

L'intégrale $\int \kappa \frac{\partial \theta}{\partial n} dS$ ~~[illegible]~~ peut être divisée en trois parties qui correspondent aux parois du vaisseau et aux deux ~~coupes~~ sections transversales. La partie première sera nulle, si l'on suppose que les parois sont des isolateurs ~~idéals~~ idéaux de la chaleur ; de même les deux autres, si la ~~coupe~~ section passe par des endroits où il y a uniformité suffisante.

B. Donc, dans des endroits où le courant stationnaire est assez lent et uniforme, la température moyenne du gaz qui s'écoule ~~s'écoulant~~ est égale à celle qui règne dans le réservoir primaire. — w. d. l. —

— C'est ce qu'ont démontré les expériences de Joule et Kelvin sur le gaz qui présente les moindres écarts de la loi Boyle-Charles,

l'hydrogène, et où le bouchon de ouate ~~représente~~ remplace un système de tubes d'efflux. Il serait intéressant, d'autre part, de vérifier notre résultat précédent, concernant les différences de température dans les couches diverses d'un gaz quittant un tube étroit, résultat qui distingue notre théorie du raisonnement usuel. —— w dec. ——

Cette différence provient de ce que le travail dans un gaz visqueux n'est pas donné par $\int (ul + vm + wn)\, p \, dS$, mais par $\int (u\, p_{xn} + v\, p_{yn} + w\, p_{zn})\, dS$. L'identité de ces deux expressions peut être démontrée facilement, pour le mouvement stationnaire, à l'aide de transformations semblables à celles du § 14, mais seulement pour toute la quantité du gaz comprise entre les parois et les deux ~~coupes~~ sections dans les réservoirs, et non pas pour ~~les~~ des tubes ~~de~~ flux ~~singuliers~~ ~~particuliers~~ considérés ~~pris~~ isolément.

Évidemment, ces remarques ne ~~regardent~~ concernent pas du ~~tout~~ les conclusions qu'on tire du phénomène de Joule et Kelvin, concernant les écarts de la loi Boyle Charles.

§ 17. Envisageons encore l'équation (21) et considérons que, pour les tubes de flux adhérents aux parois: V_t, div, et $\frac{\partial V}{\partial s}$ ~~sont~~ sont nuls. Puisque la température dans ces couches doit rester finie, ceci entraîne la conclusion, que l'intégrale de droite

[brak tekstu k. 33]

$$-\frac{k}{k-1} R \frac{d\theta}{ds} = V \frac{dV}{ds} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}$$

dont l'intégration, en combinaison avec la loi B.-Ch. mène à la formule ordinaire de détente adiabatique:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} \qquad \text{-------- (26)}$$

On est ~~accoutumé de voir~~ habitué à considérer cette formule ~~supposée~~ comme évidente à priori, dans de~~s~~ ces pareils. ~~Comme c'est erroné, en réalité, il est faux pour des gaz réels (la simple conclusion le démontre) qu'elle~~ exigerait un refroidissement d'un courant stationnaire, correspondant à la chute de pression de p_1 à p_2: $\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$,

tandisque nous avons vu ~~dans~~ au § 16 que la température moyenne reste invariable.

C). L'équation (24) au contraire, reste approximativement applicable ~~avec une certaine approximation~~ dans ce cas, pour un gaz visqueux, puisque l'abaissement de température ne correspond pas à une ~~l'~~expansion, mais à un ~~au~~ gain d'énergie cinétique.

(La température s'abaisse le plus où la vitesse est maximale, p. ex. à l'orifice d'une bombe à gaz comprimé, et c'est cet abaissement *) qui a été utilisé par divers observateurs pour ~~à~~ la liquéfaction des gaz, d'après la méthode dynamique.

(A mesure que le gaz perd sa vitesse, il regagne aussi sa température première ~~primaire~~ par suite de la chaleur de friction. Donc, l'emploi direct

*) Augmenté ~~Agrandi~~ par suite du phénomène Joule ~~Thomson~~ Kelvin.

-bilité

~~99~~ ?

??

de l'équation (26) n'est justifié que ~~pour~~ dans le cas d'une expansion infiniment lente; autrement il faut employer l'équation complète (21), ~~au~~ dans le cas des vitesses grandes l'équation approximative (24) et dans les cas où la conductibilité de la chaleur est prépondérante, on peut supposer l'isothermie.

§19. Jusqu'ici nous avons supposé, que le courant reste stationnaire, par conséquent, que la pression dans les réservoirs ~~soit~~ est maintenue constante — p. ex. à l'aide d'un dispositif pareil à celui des gazomètres, ou de la bouteille de Mariotte, ou bien par suite de la communication avec une source constante de gaz. Mais au moment où nous interrompons l'efflux, de sorte que le gaz ne sort ~~passe que par~~ que par expansion ~~du contenu~~ du réservoir, la distribution de la température ~~commencera à~~ changera, puisqu'alors il faut ajouter à la partie droite de l'équation (21) le terme $-\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left(\frac{R\theta}{k-1}+\frac{V^2}{2}\right)dm$

Si la température ~~du gaz~~ était invariable dans toute l'étendue du gaz, on aurait par suite de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\frac{R\theta}{k-1}\,dm = -\iint\frac{R\theta}{k-1}\,\rho v_n\,dS$$

Mais au cas en question, le terme de droite est plus grand, ce qui signifie que la température s'abaissera. A l'intérieur du réservoir 1, où les vitesses sont petites et la température uniforme, on aura, d'après (20):

$$\frac{\partial p}{\partial t}\iiint dv = -kp\iint v_n\,dS \qquad \text{-- -- -- (27)}$$

ce qui, joint à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \iiint dv = -\rho \iint v_n \, dS \quad \text{------} (28)$$

donne ~~le résultat~~ $p = p_0 \, e^{-\frac{k}{\Omega} \iint v_n \, dS \, dt}$ ------ (29)

[Ω désignant le volume total du réservoir 1] et la formule (26).

D). Donc, à l'intérieur du réservoir 1, la pression et la température s'abaissent d'après la formule ordinaire de détente adiabatique.

§20. Dans le tuyau de décharge, le problème sera plus compliqué et ne peut être ~~exposé~~ analysé que par le moyen d'une solution détaillée, mais on peut trouver la température approximative du gaz qui l'a traversé. Appliquons les équations (27, 28) à deux ~~coupes~~ sections transversales des lignes de flux, l'une située dans le réservoir 1, près de son issue, l'autre au réservoir 2, près de l'entrée, et désignons les volumes correspondants par Ω_1 et Ω_2. ~~Ainsi~~ On obtient les équations:

Pour Ω_1 comme plus haut:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_1 \frac{dp_1}{dt} + k \, p_1 \iint_1 v \, dS = 0 \\ &\Omega_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \iint_1 v \, dS = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{------} (30)$$

Pour $\Omega_1 + \Omega_2$, en négligeant le volume du conduit, d'une manière analogue

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + k \iint_2 p_2 \, v \, dS = 0 \\ &\frac{d}{dt}(\Omega_1 \rho_1 + \Omega_2 \rho_2) + \rho_2 \iint_2 v \, dS = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{------} (31)$$

où la pression diminue ?

En divisant (31,1) par (31,2) et en ~~supposant que~~ diminuant Ω_2 en comparaison avec Ω_1 on obtient

$$k\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)}{d(\Omega_1 \rho_1 + \Omega_2 \rho_2)} = \frac{dp_1}{d\rho_1} = k\frac{p_1}{\rho_1}$$

c'est à dire: $\theta_2 \; \theta_1$.

E). Donc (pourvu que les hypothèses ~~suppositions~~ de l'énoncé B soient remplies) la température moyenne du gaz entrant dans le ~~au~~ réservoir 2 sera (approximativement) la même que celle du gaz renfermé dans le réservoir 1, qui s'écoule ~~s'étend~~ d'après la formule adiabatique (quoique la pression soit inférieure).

On peut vérifier ce résultat, ~~qui est basé, évidemment, sur les suppositions de l'énoncé B~~, en calculant ~~la demi~~ le travail extérieur et la quantité de chaleur „absorbée", ce qui donne des valeurs égales $= V\frac{(p_0 - p_1)}{k}$, moindres, évidemment ~~naturellement~~, que ~~des~~ les valeurs qui correspondent ~~correspondantes~~ à une expansion réversible.

§ 21. Ces résultats méritent d'attirer ~~l'attention~~ des physiciens qui étudient l'effusion (la transpiration) et ~~les~~ phénomènes analogues ~~pareils~~, parce qu'ils démontrent l'~~incerti~~ inexactitude des recherches sur l'efflux stationnaire exécutées à l'aide de~~s~~ réservoirs fermés (~~à pression baissante~~).
Ainsi Donnan*), en mesurant le temps nécessaire à un abaissement de la pression dans le réservoir de 525 mm. à 322 mm. n'a pas

*) Philos. Magazine 49 p. 423 (1900)

obtenu, en réalité, des nombres relatifs pour le temps ~~nécessaire~~ d'effusion des gaz divers, puisque la température ne restait pas constante, comme il croyait, égale à 25°C, mais pouvait s'abaisser: pour l'air à −14°C; pour CO_2 à −9°C; pour l'Argon à −28°C. —

— Les nombres sont ~~seront~~ exagérés sans doute puisque les différences devaient être diminuées ~~[illegible]~~ ~~en partie~~ par suite de la ~~conduction~~ conduction de la chaleur aux parois du vaisseau, mais en tout cas, cette grave source d'erreurs indique la nécessité de l'emploi des gazomètres à pression constante ~~comme l'appareil de Bunsen~~ (§ 19).

C'est une ~~cette~~ condition, dont l'importance a été bien appréciée par Joule et Kelvin dans leurs travaux.

Les mêmes considérations s'appliquent à la plupart des recherches semblables ~~pareilles~~ et aussi, en quelque sorte aux travaux intéressants de Emden (loc. cit.). Cet ~~auteur~~ expérimentateur n'y a pas remédié par l'emploi de la soupape régulatrice (Druckreducirungsventil), puisqu'il n'a pas pris soin de réchauffer le gaz sortant, à une température invariable.

— Cette objection est encore plus importante pour les expériences de Mach et Salcher, faites à ~~avec~~ une pression plus haute et avec ~~un~~ réservoir de moindre

capacité, ce qui peut expliquer aussi l'écart entre les observations de l'abaissement de la température dans le ~~du~~ jet de gaz. (une dizaine de degrés d'après Emden, une centaine d'après Mach).

Le thermomètre, d'ailleurs, n'est nullement applicable à la mesure de la température ~~dans~~ d'un gaz animé d'une grande vitesse, puisque le mouvement du gaz et la distribution de chaleur changeraient complètement par suite de ~~sa~~ sa présence.

IV. Solutions spéciales de quelques problèmes d'aérodynamique.

§22. Nous nous bornerons à l'étude de quelques problèmes simples, dont quelques-uns, toutefois, ~~représentent~~ (nous montreront l'application) des méthodes plus générales.

L'exemple le plus simple, c'est le mouvement stationnaire d'un ~~du~~ gaz compris entre deux parois cylindriques, concentriques, l'extérieure dont le ~~à~~ rayon r_2, est fixe, et l'intérieure de rayon r_1, effectuant une rotation ~~se tournante~~ de n tours par seconde.

Désignons par ω la vitesse angulaire correspondant au rayon r; nous aurons la solution des équations (10)

$$u = -\omega \frac{y}{r} \; ; \quad v = \omega \frac{x}{r} \; ;$$ sous la condition que ω

satisfasse à l'équation:

$$\omega = -\frac{a}{2r^2} + b = \frac{2\pi n}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] \qquad (33)$$

Les pressions ~~peuvent être~~ résultent de $\frac{dp}{dr} = \omega^2 r \rho$, si la température est connue. Celle-ci est déterminée par l'équation (12), qui, intégrée, donne

~~$\theta = \theta_0 + \frac{\mu}{\kappa} \frac{a^2}{4r^2} + c \log r + m$~~

$$\theta = \theta_0 + \frac{\mu}{4\kappa} a^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right] + c \log \frac{r}{r_2} \qquad (34)$$

où θ_0 désigne la température de la paroi extérieure.

Pour déterminer le coëfficient c, supposons que le cylindre intérieur soit isolé ~~sous~~ au point de vue thermique.

Il atteindra l'équilibre thermique lorsque: $\kappa \frac{d\theta}{dr}\Big|_{r=r_2} = 0$.

La température correspondante est

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{\mu a^2}{4\kappa} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_2^2} \log \frac{r_1}{r_2} \right] \qquad (35)$$

ou approximativement, pour une petite ~~étendue~~ épaisseur $r_1 - r_2$:

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{2\mu}{\kappa} (\pi n r_2)^2 \qquad (36)$$

~~indépendamment~~ indépendamment de l'épaisseur,

ce qui donne par ex. pour $n = 100$, $r_2 = 10$ cm, dans l'air: $\theta_2 = \theta_0 + 14°$

§ 23. En ~~mettant~~ supposant $r = \infty$ dans l'exemple précédent, ou bien en supposant $u = w = 0$; $v = fc.(x)$; on aura un flux lamelliforme, stationnaire, qui est identique ~~avec~~ celui qui se produit dans des

circonstances analogues dans les liquides: $v = bx + c$

(Mais au sein des liquides, ~~aussi~~ un mouvement variable lamelliforme est aussi possible: lorsque le plan OYZ exerce des oscillations dans la direction des Y: $v_0 = A \cos \gamma t$

(Ce mouvement se propage dans la direction des X en vertu de l'équation

$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ de la même manière que la chaleur dans un corps échauffé: $v = A e^{-x\sqrt{\frac{\rho\gamma}{2\mu}}} \cos(\gamma t - x\sqrt{\frac{\rho\gamma}{2\mu}})$ ---- (37)

Dans les gaz, au contraire, il y a cette singularité que les équations (10, 11, 12) ne peuvent pas être satisfaites par ~~la supposition~~ l'hypothèse $u = w = 0$; $v = f(x, t)$; puisque la chaleur produite par le frottement donnera naissance à des vitesses dans la direction des X.

Il est facile d'en faire l'évaluation approximative.

Voilà un exemple intéressant de la manière dont ~~comment~~ des vibrations transversales peuvent produire des ondulations longitudinales sonores; ce sont les premières qui seront prédominantes dans la proximité de la paroi OYZ, les autres dans des distances plus grandes, puisque leur coefficient d'extinction sera plus petit.

(L'effet d'une raréfaction du gaz sera d'augmenter l'extinction pour les ondes longitudinales et de la diminuer pour les ondes transversales.

$\perp$ donc

§ 24. Un autre exemple qui ~~démontre~~ met en évidence une différence des liquides et des gaz, est le suivant : un courant stationnaire dans la direction X, dont la vitesse ne dépend que de la valeur de x ; les parois parfaitement polies ou ~~dans~~ à une telle distance, qu'on peut négliger leur distance.

~~C'est-à-dire qu'~~En négligeant la conduction, on aura donc les équations :

$$\left.\begin{aligned} &\rho u \frac{du}{dx} = \frac{dp}{dx} + \frac{4\mu}{3}\frac{d^2u}{dx^2} \,; \\ &\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \\ &u\frac{dp}{dx} + kp\frac{du}{dx} = (k-1)\frac{4\mu}{3}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{------------} \quad (38)$$

Ce qui est intéressant, c'est ~~qu'on a~~ que, dans ce cas, on a une solution exacte, tandis que dans l'hydrodynamique, on ne connaît pas de solution exacte des équations complètes, sauf dans quelques cas très simples comme le précédent. Un mouvement analogue stationnaire d'un liquide serait impossible, puisqu'il n'y aurait pas des forces d'expansion visqueuse qui pourraient s'opposer à l'accélération produite par les différences de pression.

Les équations (38,2) et (38,1) peuvent être intégrées immédiatement :

$$\rho u = b \quad \text{------} \quad (39,2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4\mu}(bu + p - a) \quad \text{------} \quad (39,1)$$

De même (38,3) après avoir été divisée par $\frac{du}{dx}$, dont la valeur est donnée par l'équation précédente :

$$p = \frac{(k-1)}{2}bu - \frac{c}{u} - (k-1)a \quad \text{------} \quad (39,3)$$

La substitution de cette valeur dans (39,1) et l'intégration donne:

$$x = m + \frac{4\mu}{3}\int \frac{u\,du}{(k+1)\frac{b}{2}u^2 - kau - c} \qquad (40)$$

où l'intégrale peut être ~~développée~~ évaluée par des fonctions cyclométriques ou logarithmiques.

Le problème est résolu — mais ~~s'il peut~~ qu'il possède des ~~d'~~applications ~~est~~ dans la pratique, paraît assez douteux. ~~Ce qui semble curieux, c'est le nombre quatre~~ Nous avons trouvé ici ~~des~~ quatre constantes arbitraires, ~~pendant~~ alors que nous sommes ~~accoutumés~~ habitués ~~de~~ à définir le flux ~~par des~~ p. ex. dans les tubes de Poiseuille, par trois données: la pression ~~dans~~ en deux points et la température du gaz. Mais comme nous verrons plus loin, ~~ce n'est~~ il n'y a là ~~simplicité~~ qu'une ~~singularité~~ apparente simplicité de la loi de Poiseuille, ~~qui est~~ causée par l'omission des facteurs secondaires, notamment l'influence ~~du~~ de l'état mouvement dans la proximité des ~~bouts~~ extrémités du tube.

§ 25. ~~Un mouvement qui pourrait être réalisé plus facilement~~ Un exemple qu'il serait plus facile ~~à~~ de réaliser c'est le mouvement variable défini par les conditions: $v = w = 0$; $u = f(x,t)$; mais ce problème ne pourrait être résolu dans toute sa généralité.

Nous supposerons donc que le gaz, à pression initiale p_0 et température θ_0 soit contenu dans un ~~vaisseau~~ cylindre, à parois polies, fermé d'un côté, de l'autre côté admettant un piston, à masse négligeable, qui y soit enfoncé par une force

constant a ; ~~par cause de simplification~~ pour simplifier nous négligerons aussi l'effet de l'inertie du gaz, en supposant un mouvement instantané analogue dans toute son étendue : $u = x f(t)$ . . . . (41)

Or, la force extérieure a doit être balancée par la somme de la pression intérieure du gaz et par le frottement intérieur, c'est-à dire, d'après (1) :

$$p_{xx} = a = p - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{. . . . . . (42)}$$

L'introduction de $\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$ et la substitution de p dans l'équation thermique : $\frac{dp}{dt} + k p \frac{\partial u}{\partial x} = (k-1)\frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$

donne l'équation :

$$\frac{df}{dt} + \frac{3ak}{4\mu} f + f^2 = 0 \qquad \text{. . . . . . (43)}$$

On en déduit par intégration :

$$\frac{1}{f} = A e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}; \quad \text{où : } \alpha = \frac{3ak}{4\mu} \qquad \text{. . . . (44)}$$

et, en introduisant la valeur initiale $\frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = p_0 - a$, on obtient :

$$u = \frac{\alpha x}{\left(\frac{ak}{p_0 - a} + 1\right)e^{\alpha t} - 1} \qquad \text{. . . . . . . (45)}$$

Pour trouver la densité, intégrons l'équation de continuité : $\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

ce qui donne : $\rho = \rho_0 e^{-\int_0^t f dt}$ . . . . (46)

où l'intégrale peut être développée de la manière suivante :

$$\int \frac{dt}{A e^{\alpha t} - B} = \frac{1}{\alpha B} \log\left(\frac{A e^{\alpha t} - B}{A e^{\alpha t}}\right)$$

F qui tendront à s'évanouir

C'est-à dire :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{p_0 - a}{a k} \left(1 - e^{-\alpha t} \right) \right]^{-1} \quad \text{--- --- --- (47)}$$

La densité, la pression et la température s'approcheront, par conséquent, d'une manière asymptotique ~~à la~~ ~~[illegible]~~ des limites :

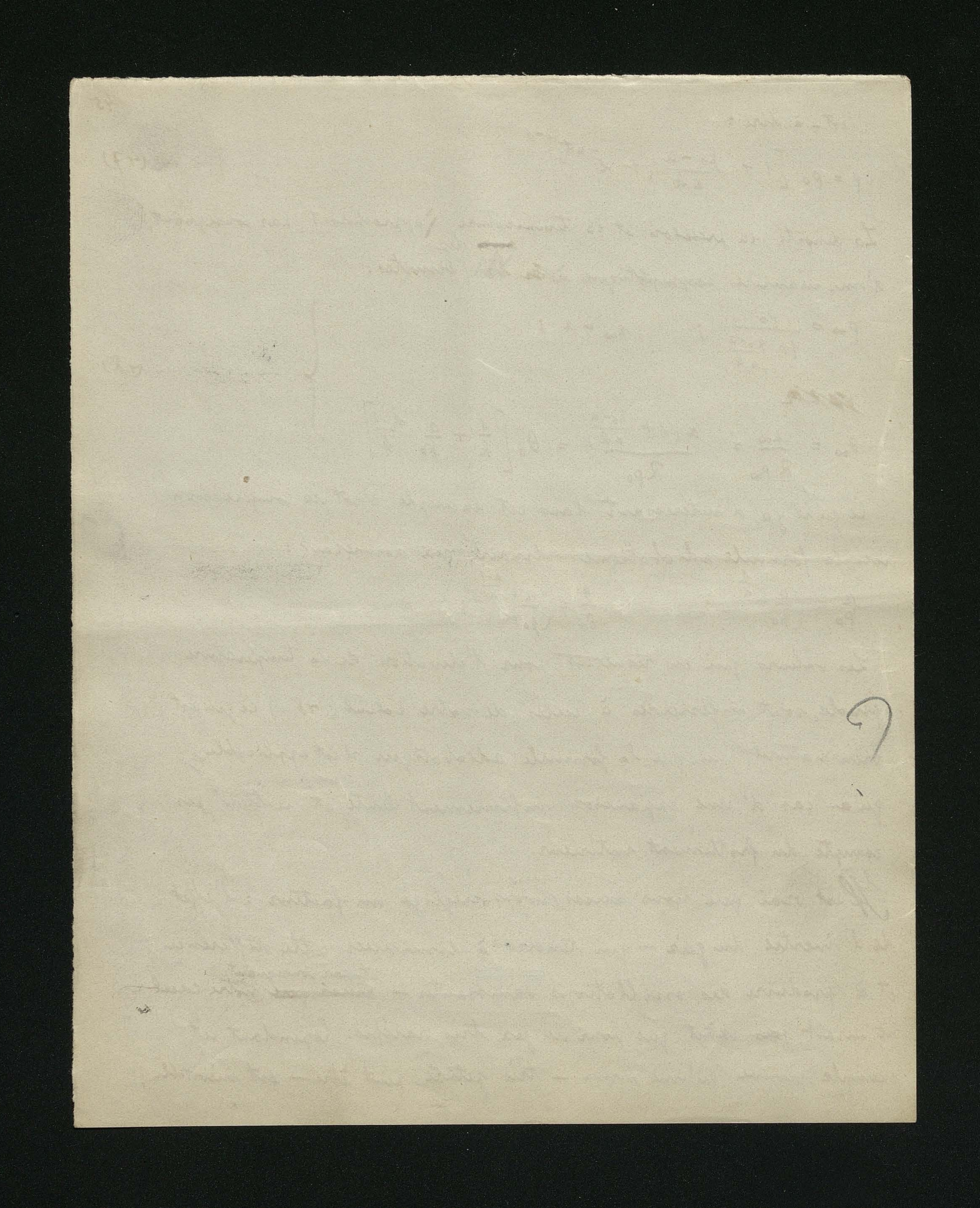
$$\left. \begin{aligned} \rho_\infty &= \frac{\rho_0}{1 + \frac{p_0 - a}{a k}} \; ; \qquad p_\infty = a \; ; \\ \theta_\infty &= \frac{p_\infty}{R \rho_\infty} = \frac{a \left(1 + \frac{p_0 - a}{a k} \right)}{R \rho_0} = \theta_0 \left[\frac{1}{k} + \frac{a}{p_0} \frac{k-1}{k} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{--- --- --- (48)}$$

Ce qu'il y a d'intéressant dans cet exemple, c'est la comparaison avec la formule adiabatique ordinaire, qui donnerait :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}} \; ; \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{a}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \; ;$$

Les valeurs qui en résultent pour l'élévation de la température finale, sont inférieures à celles de notre calcul (48), ce qui est ~~bien~~ naturel, puisque la formule adiabatique n'est applicable qu'au cas d'une expansion infiniment lente et ne tient pas compte du frottement intérieur.

Il est vrai que nous aussi, nous avons négligé un facteur : l'effet de l'inertie du gaz, qui ~~tendra~~ à diminuera cette différence et ~~il~~ produira des oscillations ~~vanissantes~~ ~~ainsi que~~ qui tendront à s'évanouir ; par conséquent, notre calcul ne serait ~~pas~~ exact que pour un gaz très raréfié. Cependant, cet exemple prouve qu'une erreur — très petite peut être — est inévitable



si l'on emploie la formule adiabatique ~~dans~~ à l'évaluation des mesures de la chaleur spécifique des gaz faites d'après la méthode de Clément-Desormes.

Leur effet sera une augmentation apparente du coëfficient k, le contraire de l'effet de la conductibilité. D'ailleurs, il dépendra de la manière dont se produit la compression; si le ~~vaisseau~~ réservoir avait, par exemple, une forme sphérique, à parois dilatables, la diminution des longueurs serait la même dans toutes les directions : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}$ = const. et, par conséquent, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$, c'est-à-dire que la viscosité n'aurait ~~pas~~ aucun d'effet ~~du tout, ni~~ ni ~~effet~~ mécanique, ni thermique, (puisque $\Phi = 0$).

§26. Le système des équations aérodynamiques est si compliqué, qu'on ne peut espérer de le résoudre directement que dans des exemples d'une ~~pareille~~ simplicité exceptionnelle, tels que ceux que nous venons de citer.

~~Autrement~~, On peut aussi employer, outre les méthodes des §7 - §13, la méthode d'es approximations successives. En voici des cas particuliers:

Si le coëfficient κ de conductibilité thermique était infini, on aurait un mouvement rigoureusement isothermique. La même ~~chose~~ conclusion s'applique approximativement à tous les cas où la conductibilité joue un rôle prépondérant comme aux mouvements „calmes“

dans des ~~vaisseaux~~ conduits étroits ; à mesure que $\frac{1}{k}$ diffère de ~~la valeur~~ zéro, la distribution de chaleur et de mouvement s'écartera de l'état limite, de sorte qu'on pourra développer toutes les variables en séries potentielles de la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{u_1}{k} + \frac{u_2}{k^2} + \frac{u_3}{k^3} + \cdots \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \frac{\vartheta_1}{k} + \frac{\vartheta_2}{k^2} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{— — — — —} \quad (49)$$

En décomposant les équations (10, 11, 12) après avoir substitué ces expressions, d'après les degrés de $\left(\frac{1}{k}\right)$, on aura une série d'équations à approximations progressives, (pourvu que la convergence soit établie) dont les trois premières représentent l'état le plus simple : isothermique :

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0 &= \text{const} = \frac{p_0}{R\rho_0} \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_0 + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \operatorname{div}_0}{\partial x} \quad \text{etc.} \\ \frac{\partial(\rho_0 u_0)}{\partial x} &+ \frac{\partial(\rho_0 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w_0)}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{— — — — —} \quad (50)$$

$$\left.\begin{aligned} (k-1)\Delta^2\vartheta_1 &= u_0\frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial p_0}{\partial z} + k \operatorname{div}_0 - (k-1)\Phi_0 \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \operatorname{div}_1}{\partial x} \quad \text{etc.} \\ \frac{\partial(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)}{\partial x} &+ \frac{\partial(\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w_1 + \rho_1 w_0)}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{— — — —} \quad (51)$$

§27. Essayons d'appliquer cette méthode d'approximation à la théorie ordinaire*) du mouvement dans les tubes Poiseuille. Le raisonnement usuel correspond aux équations (50) simplifiées encore par ~~la supposition~~ ~~l'hypothèse~~ $v = w = 0$ et par l'omission des termes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ etc.

Pour obtenir une approximation plus grande, ~~on devrait~~ il faut substituer

---

*) O.E. Meyer Pogg. Ann. 127 p. 253, 353 (1866); 148 p. 1 (1873).

les formules qui en résultent, c'est-à dire :

$$p = \sqrt{p_1^2 - \frac{x}{l}(p_1^2 - p_2^2)} = \sqrt{a - cx} \qquad \text{— — — —} \quad (52)$$

$$u = \frac{\delta^2 - r^2}{8\mu} \, \frac{c}{\sqrt{a-cx}} \qquad \text{— — — —} \quad (53)$$

dans l'~~un~~ équation~~s~~ (51,1) ~~[illegible]~~, qui se transforme dans

~~ce qui donne~~ $$\Delta^2\theta_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right) = \frac{c^2}{16\mu} \, \frac{\delta^2 - 2r^2}{a - cx} \qquad \text{— — —} \quad (54)$$

L'intégration donne :

$$\theta_1 = -\frac{c^2}{128.\mu} \, \frac{(\delta^2 - r^2)^2}{a - cx} = -\frac{1}{128.\mu}\left[\frac{(\delta^2 - r^2)(p_1^2 - p_2^2)}{l p}\right]^2 = -\frac{u^2 \mu}{2} \qquad \text{— — —} \quad (55)$$

Nous aurons donc : $\theta = \theta_0 - \frac{\mu}{2k} u^2$

et, ce qui est ~~assez curieux~~ remarquable, $\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$, c'est-à dire que le gaz n'échange pas de chaleur avec les parois du tube.

L'abaissement maxim~~al~~um, dans l'axe du tube, s'élève à

$$\Delta\theta = \frac{9.\delta^4}{16.128.K\mu}\left[\frac{p_1^2 - p_2^2}{l p}\right]^2. \qquad \text{—} \quad (56)$$

~~La valeur serait, par exemple, pour~~

~~$p_1 = 1$ atm., $p_2 = \frac{1}{2}$ atm., $\delta = 0{\cdot}1$ mm., $l = 10$ cm.: $\Delta\theta = 0{\cdot}6° - 2{\cdot}4°$~~

Ainsi on trouve pour les expériences de Koch*) sur la viscosité de la vapeur de mercure, ~~en~~ avec les nombres approximatifs:

$p_1 = 100$ cm., $p_2 = 1$ cm., $l = 10$ cm., $r = 0{\cdot}00425$ cm.

un abaissement sur l'axe de 0·04° jusqu'à 400°C.

*) Wiedem. Ann. 19 p. 857 (1883)

Ce résultat ne sera pas exact, sans doute, mais il suffit pour démontrer que la formule de Poiseuille, fondée sur ~~la supposition~~ l'hypothèse d'un mouvement lent et isothermique, n'est pas applicable dans un cas pareil et que le ~~curieux~~ résultat final de ce travail — proportionnalité de μ ~~avec~~ à $\theta^{1.6}$ — est dénué de fondement. Des objections ~~pareilles~~ de même nature s'attachent aux travaux de L. Meyer et Steudel*) et même à quelques unes des mesures de O.E. Meyer (loc. cit.), quoique l'influence sur les nombres définitifs de celles-ci ne soit probablement pas importante.

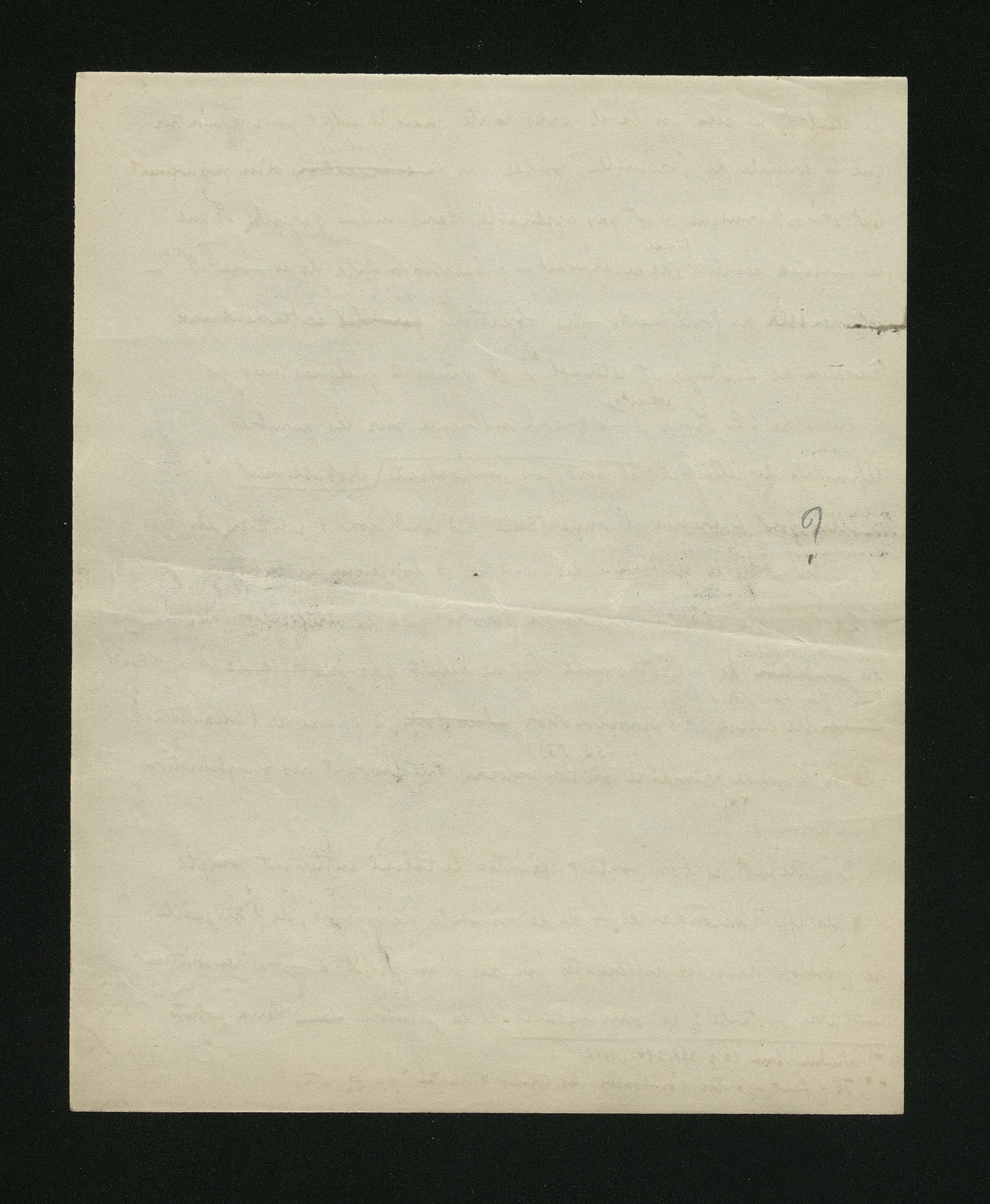
Elles font apprécier l'importance des conditions : petitesse du diamètre et de la différence des pressions et longueur du tube.

La formule (56) d'ailleurs ne servira qu'à la vérification de la ~~condition~~ supposition d'isothermie. On ne serait pas ~~justifié de~~ en droit ~~monter~~ de pousser plus loin le calcul d'approximation ~~plus loin~~, à cause de l'inexactitude de la formule primaire (52, 53) ~~et des valeurs~~ qui provient des simplifications mentionnées.**)

D'autre part, si l'on voulait exécuter le calcul en tenant compte de ces effets secondaires — de la viscosité de volume et de l'inégalité de pression dans les différentes couches d'un profil — on rencontrerait un autre obstacle : la connaissance de la pression ~~dans~~ en deux points

*) Wiedem. Ann. 16 p. 368, 394 (1882)

**) Il y faut ajouter l'omission des termes d'inertie $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ etc.



de l'axe, p_1, p_2 et de la température initiale ne suffirait pas à la détermination des constantes et des fonctions arbitraires du calcul; il faudrait connaître encore la distribution détaillée de la vitesse et de la pression dans le profil initial.

Cela veut dire que le problème n'est pas défini d'une façon exacte, si l'on n'a pas précisé la forme des deux réservoirs, qui communiquent par le tube, surtout dans la proximité de ses bouts. L'effet de ces circonstances, qui se manifeste par exemple dans les phénomènes de la „vena contracta", peut modifier d'une manière considérable la transpiration par des tubes larges, de petite longueur.

Cependant la méthode de Poiseuille, employée de la manière décrite au § 13, peut servir toujours à des mesures exactes de la viscosité relative.

§ 28. Une autre catégorie de problèmes peut être illustrée par l'exemple suivant. Supposons une sphère, en repos, dans un gaz animé d'un mouvement stationnaire („calme") avec une vitesse uniforme c à l'infini; cette hypothèse, qui implique l'omission des termes $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ en comparaison avec $\mu \Delta^2 u$, exige que $\frac{\rho c a}{\mu}$ soit une quantité petite.

La solution serait très simple, si le gaz était comprimé à une densité infinie, parceque dans ce cas div serait égal à zéro (d'après (11)) et le mouvement

serait celui d'un liquide incompressible. Pour trouver les corrections qui résultent de la compressibilité, considérons que la distribution de la densité et aussi des autres variables dépendra de la valeur constante de la ~~densité~~ pression à l'infini, que nous appelerons P.

A mesure que $\frac{1}{P}$ s'éloigne de ~~la valeur~~ zéro, le mouvement s'écartera du type incompressible. Donc, on pourrait développer toutes les variables en séries d'après les degrés de $\frac{1}{P}$, ~~d'une façon semblable~~ comme ~~dans~~ au § 26, ce qui permettrait de décomposer les équations (10, 11, 12) ~~dans~~ en un système d'équations à approximations progressives. ~~Par cause de simplicité~~ Pour simplifier nous nous bornerons à la considération de deux termes, en supposant que ~~toutes~~ les variables ~~consistent~~ ~~sont~~ soient composées de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{lll} u = u_0 + u_1 ; & v = v_0 + v_1 ; & w = w_0 + w_1 ; \\ p = p_0 + p_1 ; & \rho = \rho_0 + \rho_1 ; & \theta = \theta_0 + \theta_1 ; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (57)$$

où les termes premiers représentent le type limite d'incompressibilité, les termes seconds les corrections à y ajouter, petites en comparaison avec ~~les~~ ceux-là. L'équation (9) donne:

$$\left.\frac{p_0}{\rho_0} = R\theta_0 ; \qquad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\theta_1}{\theta_0} ;\right\} \quad \ldots\ldots (58)$$

~~Et les~~ Puisque nous supposons que les variations de la pression, définies par $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ etc. soient petites par rapport à p_0 etc., on pourra déduire de l'équation (11) comme approximation première:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}_0 = 0 \\ \text{appr. seconde: } \rho_0 \operatorname{div}_1 + u_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (59)$$

De l'équation (12):

$$u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + k\, p_0\, \mathrm{div}_1 = (k-1)\left[\Phi_0 + \kappa \Delta^2 \theta_0\right] \quad \text{------ (60)}$$

qui se transforme, eu égard à (59,2) et (58,1) ~~dans~~ en:

$$u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \Phi_0 = \frac{k}{k-1} R \rho_0 \left[u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z}\right] = -\kappa \Delta^2 \theta_0 \quad \cdots (61)$$

De l'équation (10) enfin:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_0 ; & \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \mu \Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{div}_1 ; \\ \frac{\partial p_0}{\partial y} &= \mu \Delta^2 v_0 ; & \frac{\partial p_1}{\partial y} &= \mu \Delta^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{div}_1 ; \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} &= \mu \Delta^2 w_0 ; & \frac{\partial p_1}{\partial z} &= \mu \Delta^2 w_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{div}_1 ; \end{aligned}\right\} \quad \text{------ (62)}$$

L'approximation première est représentée par le système (62,1) qui détermine, ~~ensemble~~ avec (59,1), le problème analogue de l'hydrodynamique, dont la solution voici*):

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -\frac{3}{4} ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{x^2}{r^3} + c\left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3}\right) \\ v_0 &= -\frac{3}{4} ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xy}{r^3} \\ w_0 &= -\frac{3}{4} ca \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xz}{r^3} \\ p_0 &= P - \frac{3\mu}{2} \frac{cax}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \text{------ (63)}$$

Nous en ferons usage pour évaluer les variations de la température d'après (61). Le côté gauche de cette équation aura la valeur:

$$u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} = -\frac{3}{2} \mu \frac{c^2 a}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{9}{2} \mu \frac{c^2 a x^2}{r^3} \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3}\right) \quad \cdots (64)$$

$$\Phi_0 = \frac{9}{4} \mu \frac{c^2 a^2}{r^4} \left(3 \frac{x^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} - 6 \frac{a^2 x^2}{r^4} + 2 \frac{a^4 x^2}{r^6}\right) \quad \text{---- (65)}$$

ce qui démontre que la chaleur provenante de la compression et du frottement intérieur sont des grandeurs du même ordre.

Les équations de la forme (61) – appartenantes au type „elliptique" –

$$\Delta^2\vartheta + u_0\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v_0\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w_0\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = F$$

qui se rencontrent souvent dans des problèmes semblables ~~pareils~~, sont peu étudiées ~~explorées~~ jusqu'à présent. Elles peuvent être intégrées par la ~~[illegible]~~ méthode laborieuse d'approximations successives, en résolvant les équations

$$\Delta^2\vartheta' = F$$

$$\Delta^2\vartheta'' = F - \left(u_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial x} + v_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial y} + w_0\frac{\partial\vartheta'}{\partial z}\right)$$

$$\Delta^2\vartheta''' = F - \left(u_0\frac{\partial\vartheta''}{\partial x} + v_0\frac{\partial\vartheta''}{\partial y} + w_0\frac{\partial\vartheta''}{\partial z}\right) \text{ etc.}$$

et en, tenant compte de ~~en égard à~~ la condition de surface $\vartheta = \Theta$.

On peut se restreindre à l'approximation première, lorsque le coefficient $\frac{ca R}{k}\rho_0$ qui détermine la convergence de la série, est petit — condition qui ne diffère pas beaucoup, ~~sous~~ au point de vue quantitatif de la supposition antérieure d'un mouvement „calme". Dans ce cas, on déduirait la valeur suivante de (61), qui définit l'écart de l'isothermie :

$$\theta_0 = \Theta + \frac{\mu c^2}{32\,k}\left\{\frac{a}{r}\left[19 + 13\frac{a^2}{r^2} + 24\frac{x^2}{r^2} - 39\frac{x^2a^2}{r^4}\right] + \frac{3a^2}{r^2}\left[-9 + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a^4}{3r^4} + \frac{4a^2x^2}{r^4} - \frac{2a^4x^2}{r^6}\right]\right\} \quad \ldots (66)$$

En substituant cette valeur dans (58,1)(59,2), on déduit la correction de la pression qui correspond à la compressibilité et à la variabilité de la température. Elle sera très petite d'ailleurs, en comparaison avec la pression de résistance p, lorsqu'on suppose un mouvement „calme".*)

*) Voir un calcul analogue ~~[illegible]~~ approximatif, sans considération de la variabilité de la température : O.E. Meyer Crelle Journal 75 (1873)

9

r

§ 29. Puisque la température s'élève, d'après cette formule, ~~suivant~~ la direction de la normale à la surface en raison de

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z}\Big|_{z=a} = \frac{\mu c^2}{32\,K a}\left[20 + 111 \cos^2\varphi\right] \qquad (67)$$

une sphère solide, animée d'une vitesse c dans l'air tranquille devrait s'échauffer de même ; l'effet serait plus grand aux „pôles" qu'à „l'équateur", sa valeur moyenne serait, d'après un calcul approximatif,

$$\delta\theta = \frac{57}{32}\,\frac{\mu c^2}{k} \qquad (68)$$

indépendant des dimensions de la sphère.

La considération des corrections suivantes dans la série $\vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$ changerait ce résultat de telle façon, que la distribution deviendrait asymétrique, le réchauffement étant plus considérable au pôle „postérieur" qu'à l'„antérieur".

Ce résultat, de même que l'excès comparatif de la température à l'équateur est en accord avec les expériences de Joule et Kelvin *) pour des petites vitesses ; et aussi la formule (68) s'accorde ~~à~~ avec leurs mesures pour des vitesses moyennes, ~~(entre et —)~~ en ce qui concerne l'indépendance de l'échauffement des dimensions du corps et la proportionnalité au carré de la

*) Voir §12, δ.

vitesse, seulement le coëfficient numérique est plus petit [1°C. pour 28 $\frac{m}{sec.}$, tandisque 1°C. pour 55 $\frac{m}{sec.}$ d'après Kelvin.]

Cependant, on aurait tort de considérer ~~cela~~ ceci comme une confirmation de la théorie, puisque les conditions de~~s~~ ces expériences ~~outrepassent~~ dépassent de beaucoup les suppositions du calcul. Rappelons ~~[illegible]~~ que $\rho c a$ doit être petit en comparaison ~~avec~~ de μ (= 0·00018), afin que le mouvement soit „calme"; par conséquent des vitesses ~~pareilles~~ ~~élevées plus haut~~ employées par Kelvin (ne seraient admissibles que dans un gaz très raréfié.

§30. Nous voyons que l'importance pratique de pareils exemples est limitée assez sérieusement par la ~~supposition~~ hypothèse du „calme". —

— Un intérêt beaucoup plus considérable s'attacherait aux mouvements „violents" (voir §6), où d'ailleurs la compressibilité et les phénomènes thermiques jouent un rôle beaucoup plus considérable. —

Les méthodes (approximatives) qui pourraient être appliquées à des phénomènes pareils, où l'omission des termes d'inertie ne serait plus justifiée, sont les suivantes :

1). En considérant que le mouvement d'un gaz plus léger [c'est-à-dire ayant un coëfficient R plus grand] sera plus rapproché du type „calme", on peut développer toutes les variables en séries de $\frac{1}{R}$, ce qui

donne des corrections successives à ajouter aux formules du type limite, d'après un procédé semblable à celui des §26, 28.

2). Un développement pareil, d'après les degrés de μ, définirait des corrections à faire dans les ~~effets~~ résultats se rapportant au type limite du gaz idéal, à cause de la viscosité.

L'avantage de ces méthodes consiste dans la linéarité des équations résultantes, mais leur complication est ~~plus~~ cependant plus considérable que dans les exemples précédents.

— En outre, lorsqu'une certaine limite d'inertie est ~~surpassée~~ dépassée, par suite ~~d'agrandissement~~ de l'augmentation de la vitesse ou de la densité, l'état ~~labile~~ instable devient ~~labile~~, et des mouvements "turbulents" prennent naissance.

Nous avons noté, dans les chapitres précédents, quelques cas ~~pareils~~ semblables, comme les ondulations ~~fixes~~ ~~stables~~ fixes dans le jet d'un gaz, et les sons de friction, qui semblent être la cause primaire du son dans les instruments à ~~souf~~ vent.

— Il faudrait chercher d'autres méthodes pour le traitement de ~~tels~~ ces phénomènes, puisque les développements précédents supposent la continuité des fonctions.

(Mais nous ne nous occupons pas ici des problèmes du mouvement visqueux inerte, ~~en~~ considérant que dans un cas beaucoup plus

simple — dans l'hydrodynamique des liquides visqueux — les recherches analogues sont à peine abordées et, jusqu'à présent, n'ont fourni que des résultats très insuffisants.

